1. Eef01 Soit A, B, A', B' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer

$$\left.\begin{array}{r}\dim A + \dim A' = \dim E \\ \dim B + \dim B' = \dim E \\ A + B = E \\ A' + B' = E\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A \oplus B = E \\ A' \oplus B' = E\end{array}\right.$$

2. Eef02 Soit $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $x \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans $\mathcal{A}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base et préciser les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ dans les cas suivants :

$$(1)\begin{cases} b_1 = a_2 \\ b_2 = a_3 \\ b_3 = a_1 + a_2 \\ b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} b_1 = -a_1 + a_3 \\ b_2 = a_1 \\ b_3 = a_2 \\ b_4 = -a_2 - a_3 + a_4 \end{cases}$$

3. (Eef03) Polynômes d'interpolation de Lagrange.
Soit $(a_0, a_1, \cdots a_n)$ $n+1$ nombres complexes *distincts*. On note, pour i entre 0 et n,

$$L_i = \prod_{j \in \{0,\dots,n\} - \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Montrer que $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, préciser les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

4. (Eef04) Polynômes de Bernstein.
Soit n un entier, on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour tout entier k entre 0 et n. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de 1 dans cette base ?

5. (Eef05) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_i = \widehat{P}(X+i)$. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est liée.

6. (Eef06) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
   a. Calculer u_n lorsque
   $$u_0 = -1, u_1 = 1, u_n = \frac{3}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2}$$
   b. Calculer u_n lorsque
   $$u_0 = 1, u_1 = 9, u_n = u_{n-1} - \frac{1}{4}u_{n-2}$$
   c. Calculer u_n lorsque
   $$u_0 = 1, u_1 = 1, u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2}$$

7. (Eef07) Soit $\mathbf{K}$ un corps *fini* et E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension n. Montrer que E est fini et préciser son cardinal.

8. (Eef08) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer que
$$(\dim(A+B))^2 + (\dim(A \cap B))^2 \geq (\dim(A))^2 + (\dim(B))^2$$

9. (Eef09) On définit f_1, f_2, f_3, f_4 dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sin^2(x),\ f_2(x) = \cos^2(x),\ f_3(x) = \sin(2x), f_4(x) = \cos(2x)$$
Calculer $\operatorname{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

10. (Eef10) Dans $\mathbb{R}^4$, on définit
$$v_1 = (1,2,3,4),\ v_2 = (1,1,1,3),\ v_3 = (2,1,1,1),\ v_4 = (-1,0,-1,2),\ v_5 = (2,3,0,1),\ A = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3),\ B = \operatorname{Vect}(v_4, v_5)$$
Calculer les dimensions de A, B, $A \cap B$, $A + B$.

11. (Eef11) Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+3)u_{n+1} - (n+2)u_{n+2} - u_n = 0$$
   a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que (a, b) en est une base avec a la suite constante de valeur 1 et
   $$b = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
   b. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé et
   $$F_p = \{u \in E \text{ tq } u_p = 0\}$$
   Montrer que F_p est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

12. (Eef12) Supplementaire commun à deux sous-espaces.
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
   a. Soit U et V deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
   $$U \cup V = E \Rightarrow U = E \text{ ou } V = E.$$
   Dans la suite de l'exercice, E est de dimension finie, A et B sont deux sous-espaces de même dimension strictement plus petite que $\dim E$.
   b. Montrer qu'il existe des familles libres $\mathcal{F}$ de vecteurs de E telles que
   $$A \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\} \text{ et } B \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}.$$
   c. Montrer qu'il existe un sous-espace C de E tel que
   $$A \oplus C = B \oplus C = E.$$

13. (Eef13) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(u, v, w)$ avec
$$u = (1,1,0),\ v = (1,0,1),\ w = (1,2,-1).$$
Trouver une base de F.

14. (Eef14) On note $\mathcal{D}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{D}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on note $f_x \in \mathcal{D}$ définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_x(t) = f(t+x).$$
On note $V = \operatorname{Vect}(f_x,\ x \in \mathbb{R})$ et on suppose $\dim V = 2$. Montrer que f' et f'' sont dans V. En déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

1. pas de correction pour Eef01.tex
2. pas de correction pour Eef02.tex
3. pas de correction pour Eef03.tex
4. pas de correction pour Eef04.tex
5. (Cef05) Tous les polynômes sont de même degré $\leq n-1$. Il s'agit donc d'une famille de $n+1$ vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est de dimension n. Cette famille est liée d'après la condition suffisante de dépendance.
6. (Cef06) On cherche les coordonnées dans les bases indiquées par le cours (les trois cas figurent).

$$\begin{array}{ll} \text{cas a} & u_n = 3 - 2^{2-n} \\ \text{cas b} & u_n = 2^{-n} + 17n2^{-n} \\ \text{cas c} & u_n = 2^n \cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} 2^n \sin\frac{2n\pi}{3} \end{array}$$

7. (Cef07) Soit q le nombre d'éléments du corps $\mathbf{K}$ et n la dimension de l'espace. Par définition, une base $(a_1, \cdots, a_n)$ fournit une bijection

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^n &\rightarrow E \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) &\mapsto \lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_n a_n \end{aligned}$$

On en déduit que le nombre d'éléments de E est q^n.

8. (Cef08) On utilise la formule

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

En remplaçant, il faut montrer la positivité de

$$2(\dim(A\cap B)^2 + \dim(A)\dim(B) - \dim(A)\dim(A\cap B) - \dim(B)\dim(A\cap B))$$

qui se factorise en

$$(\dim(A) - \dim(A\cap B))(\dim(B) - \dim(A\cap B)) \geq 0$$

9. pas de correction pour Eef09.tex
10. (Cef10) Pour savoir si (v_1, v_2, v_3) est libre, on forme le système traduisant $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$.

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \dim(A) = 3.$$

(v_4, v_5) est libre (position des 0) donc $\dim(B) = 2$.
Pour savoir si (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre, on forme le système traduisant $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$.

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

La famille de4 vecteurs est libre dans $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base. On en déduit

$$\dim(A+b) = 4 \text{ et } \dim(A\cap B) = 1$$

d'après la formule de Grassmann.

11. pas de correction pour Eef11.tex
12. (Cef12)
    a. Supposons $E = U \cup V$ et $U \neq E$. Montrons que $U \subset V$.
    Il existe un élement de E qui n'est pas dans U, il est donc forcément dans V, notons le v : $v \in V$ et $v \notin U$.
    Pour tout $u \in \mathbb{U}$, considérons $u+v$. Il appartient à $U \cup V$ mais il ne peut pas appartenir à U sinon v appartiendrait à U. On conclut

    $$u + v \in V \Rightarrow u \in V.$$

    b. Comme A et B sont différents de E (degré strictement plus petit), $A \cup B \neq E$. Il existe donc un vecteur x qui n'est ni dans A ni dans B. Il est donc non nul. La famille (x) à un seul élément est libre et vérifie la condition imposée.
    c. Parmi les familles vérifiant les conditions de b, considérons en une maximale : $(x_1, \cdots, x_q)$. Une telle famille existe car les familles libres ont moins de $\dim E$ éléments. Notons $C = \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_q)$.
    Pour tout $x \notin C$, la famille $(x_1, \cdots, x_q, x)$ est libre.
    À cause de la maximalité,

    $$\operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_q, x) \cap A \neq \{0_E\} \text{ ou } \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_q, x) \cap B \neq \{0_E\}.$$

    Remarquons que

    $$\left.\begin{aligned} \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_q, x) \cap A \neq \{0_E\} \\ \operatorname{Vect}(x_1, \cdots, x_q) \cap A = \{0_E\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in C + A.$$

    En effet, si

    $$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_q x_q + \lambda x = a \neq 0_E$$

alors $\lambda \neq 0$ d'où $x \in A+C$. On en déduit

$$E = (C+A) \cup (C+B).$$

car lorsque $x \notin C$ l'une ou l'autre alternative se réalise (les deux si $x \in C$.
On en déduit d'après a. que l'un des deux espaces est E : par exemple $E = C+A$. La somme est alors directe car $A \cap C = \{0_E\}$. Utilisons la dimension :

$$\begin{aligned} E = C \oplus A &\Rightarrow \dim E = \dim C + \dim A \\ &= \dim C + \dim B \text{ car } \dim A = \dim B \\ &\Rightarrow E = C \oplus B \text{ car } C \cap B = \{0_E\}. \end{aligned}$$

13. (Cef13) Comme u et v comportent des 0 à des places différentes,
$$\lambda u + \mu v = (\lambda + \mu, \lambda, \mu)$$
donc (u, v) est libre. De plus, $2u - v = w$ donc (u, v) engendre F. C'est une base : $\dim(F) = 2$.
14. (Cef14) Il existe x_1 et x_2 tels que (f_{x_1}, f_{x_2}) base de V. Comme la famille est génératrice, il existe des fonctions à valeurs complexes λ_1 et λ_2 telles que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_x = \lambda_1(x) f_{x_1} + \lambda_2(x) f_{x_2}.$$
On va montrer que λ_1 et λ_2 sont dérivables. Pour cela on les exprime comme solutions d'un système de Cramer. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,
$$(*) \qquad f(x+t) = \lambda_1(x) f(x_1 + t) + \lambda_2(x) f(x_2 + t).$$
En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} f(x_1)\lambda_1(x) + f(x_2)\lambda_2(x) = f(x) \\ f(x_1+t)\lambda_1(x) + f(x_2+t)\lambda_2(x) = f(x+t) \end{cases}$$
Le déterminant de ce système est
$$\Delta_t = f(x_1) f_{x_2}(t) - f(x_2) f_{x_1}(t).$$
Comme (f_{x_1}, f_{x_2}) est libre, il existe t_0 tel que $\Delta_{t_0} \neq 0$. Les expressions de λ_1 et λ_2 par les formules de Cramer montrent qu'elles sont dans V.
En dérivant $(*)$ une fois par rapport à x puis en prenant $x = 0$, on montre que $f' \in V$. On en déduit que f' est dérivable. De plus, il existe des fonctions μ_1 et μ_2 vérifiant
$$(**) \qquad f'(x+t) = \mu_1(x) f(x_1 + t) + \mu_2(x) f(x_2 + t).$$
On montre de la même manière que $\mu_1, \mu_2 \in V$ donc $f'' \in V$.
La famille de trois vecteurs (f, f', f'') d'un espace de dimension 2 est liée (condition suffisante de dépendance) donc f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.