1. (Een01) Soit p et n deux entiers ($1 \leq p \leq n$). On définit les ensembles suivants :
   – $E = [\![1, p]\!]$, $F = [\![1, n]\!]$,
   – $\mathcal{C}_{p,n} \subset \mathcal{F}(E, F)$: fonctions croissantes,
   – $\mathcal{S}_{p,n} \subset \mathcal{F}(E, F)$: fonctions strictement croissantes.

   a. Montrer que
   $$\operatorname{Card}(\mathcal{S}_{p,n}) = \binom{n}{p}.$$
   Montrer que le nombre d'éléments de $\mathcal{C}_{p,n}$ est le nombre de n-uplets
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [\![0, p]\!]^n \text{ tq } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p.$$

   b. À chaque élément f de $\mathcal{C}_{p,n}$, on associe une fonction g définie par
   $$\forall x \in [\![1, p]\!],\ g(x) = f(x) + x - 1.$$
   Montrer que $g \in \mathcal{S}_{p,n+p-1}$. Montrer que $\mathcal{C}_{p,n}$ et $\mathcal{S}_{p,n+p-1}$ ont le même nombre d'éléments.

2. (Een02) Quel est le nombre de relations reflexives sur un ensemble E de cardinal n ? Quel est le nombre de relations reflexives et symétriques sur un ensemble de cardinal n ?

3. (Een03) Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

4. (Een04) Soit E un ensemble de cardinal n.
   Calculer le nombre de couples de parties (A, B) de E telles que $A \subset B$.
   Calculer le nombre de couples de parties (A, B) de E telles que $A \cup B = E$.

5. (Een05) On définit une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par le tableau suivant

4					
3	9				
2	5	8	$\ddots$		
1	2	4	7	11	
0	0	1	3	6	10
	0	1	2	3	4

   qui se poursuit indéfiniment et où la case d'abscisse i et d'ordonnée j contient le nombre $f(i, j)$. Cette fonction est clairement bijective. Préciser explicitement $f(i, j)$.

6. (Een06) Nombre de surjections. Soit E et F deux ensembles finis, il est clair que le nombre d'applications surjectives de E dans F ne dépend que du nombre d'éléments dans E et dans F. On le note
   $$s(\sharp E, \sharp F)$$
   Soit n et p deux entiers naturels fixés avec $1 \leq p \leq n$.

   a. En classant les surjections suivant l'ensemble des antécédents d'un élément fixé de l'espace d'arrivée, former une relation entre $s(n, p)$ et les $s(k, p-1)$ pour $k \in \{0, \cdots, n\}$.

   b. Former une autre relation en classant les surjections d'abord suivant l'image d'un élément fixé de l'espace de départ puis selon que cette image admette un seul antécedent ou plusieurs.

7. (Een07) Dans un ensemble E à n éléments.
   Déterminer le nombre d'opérations internes.
   Déterminer le nombre d'opérations internes commutatives.
   Déterminer le nombre d'opérations internes avec un élément neutre.
   Déterminer le nombre d'opérations internes commutatives et avec un élément neutre.

8. (Een08) On note r_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.
   Former une relation entre r_n et les r_k pour k entre 1 et n. En déduire les r_n pour n entre 1 et 5.
   Pour obtenir cette relation, considérer un ensemble E à n éléments dans lequel un élément a est fixé puis classer les relations d'équivalence sur E selon la classe de a.

9. (Een09) Soit $p_1, \cdots, p_k$ des entiers naturels tels que
   $$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$$
   On désigne par $c(n, p_1, \cdots, p_k)$ le nombre de k-uplets $(A_1, \cdots, A_k)$ de parties d'un ensemble E à n éléments telles que :
   $$\begin{array}{ll} & A_1 \cup \cdots \cup A_k = [\![1, n]\!] \\ \forall (i,j) \in \{1, \cdots, k\}^2 & : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ \forall i \in \{1, \cdots, k\} & : \sharp A_i = p_i \end{array}$$

   a. Que vaut $c(n, p, n-p)$?

   b. Trouver une relation entre
   $$c(n, p_1, \cdots, p_k) \text{ et } c(n - p_k, p_1, \cdots, p_{k-1})$$
   En déduire
   $$c(n, p_1, \cdots, p_k) = \frac{n!}{p_1!\, p_2! \cdots p_k!}$$

   c. Montrer la *formule du multinôme*
   $$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{(p_1, \cdots, p_k) \in \mathbb{N}^k \\ p_1 + \cdots + p_k = n}} \frac{n!}{p_1!\, p_2! \cdots p_k!} x_1^{p_1} \cdots x_k^{p_k}$$

10. (Een10) On définit la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$par :
   $$\begin{cases} \phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}$$
   Montrer que :
   $$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_{m+k} = \phi_{m+2n}$$

11. (Een11) Une *involution* d'un ensemble E est une bijection f de E dans E telle que $f \circ f = Id_E$. On note x_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments. Préciser x_1 et x_2 puis former une relation entre x_n, x_{n-1} et x_{n-2}.

12. (Een12) Tout individu a entre 0 et 500 000 cheveux. Paris compte 2 500 000 habitants. Montrer qu'au moins cinq personnes ont le même nombre de cheveux. (classer les individus suivant leur nombre de cheveux)

13. (Een13) Pour tout u, v naturels tels que $u \leq v$, on note $i(u,v)$ le nombre d'injections d'un ensemble à u éléments dans un ensemble à v éléments.
Soit p, a, b entiers naturels avec $p \leq \min(a,b)$. Montrer que

$$\begin{aligned} i(p,a+b) &= i(p,a) + \frac{p}{1} i(p-1,a)i(1,b) \\ &+ \frac{p \times (p-1)}{1 \times 2} i(p-2,a)i(2,b) + \cdots + i(p,b) \end{aligned}$$

Écrire la somme précédente avec le symbole $\sum$, puis démontrer la relation.

14. (Een14) Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de mains de 5 cartes contenant exactement un brelan ? On modélisera une main par une partie à 5 éléments.

15. (Een15) Formule de VanderMonde par dénombrement.
Soit $q \in \mathbb{N}, q \geq 3$ et $p \in [\![0,q]\!]$. Montrer que

$$\binom{q}{p} = \binom{q-3}{p-3} + 3\binom{q-3}{p-2} + 3\binom{q-3}{p-1} + \binom{q-3}{p}.$$

On devra classer des parties d'ensembles. Soit $r \leq p$, montrer de même que

$$\binom{q}{p} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}\binom{q-r}{p-k}.$$

16. (Een16) Parties sans éléments consécutifs.
    a. Quel est le nombre de partie de $[\![1,n]\!]$ à p éléments sans éléments consécutifs ?
    On pourra considérer des fonctions « très strictement croissantes ».
    b. Soit t_n le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ sans éléments consécutifs. Montrer que

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n,\ t_{2n+1} = t_n^2 + t_{n-1}^2, \qquad t_{2n} = t_n^2 - t_{n-2}^2.$$

    c. Calculer t_{50}.

17. (Een17) Soit E un ensemble à n éléments, $p \in [\![0,n]\!]$ et

$$F = \{(A,B) \in \mathcal{P}(E) \text{ tq } A \cap B = \emptyset \text{ et } \sharp(A \cup B) = p\}$$

En dénombrant F de deux manières, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

18. (Een18) Soit E un ensemble à n éléments. Calculer

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sharp X, \quad \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \sharp(X \cap Y), \quad \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \sharp(X \cup Y).$$

Rémy Nicolai _fex_enpdf du 20 avril 2019

1. pas de correction pour Een01.tex
2. (Cen02) Une relation binaire sur un ensemble E s'identifie à une partie Ω de $E\times E$: un élément a est en relation avec b si et seulement si (a,b) est dans la partie du produit cartésien associé.
La relation est réflexive si et seulement si Ω contient la diagonale (la partie de $E\times E$ formée par les couples (a,a)). Le nombre de relations réflexives est donc le nombre de parties du complémentaire de cette diagonale soit
$$2^{n^2-n}$$
En numérotant arbitrairement $a1,\cdots,a_n$ les éléments de E, on peut caractériser les relations reflexives et symétriques par les parties du « triangle » de $E\times E$ formé par les (a_i,a_j) avec $i<j$. L'autre partie de Ω étant obtenue par symétrie. Le nombre de relations réflexives et symétriques est donc
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
3. pas de correction pour Een03.tex
4. (Cen04) On peut classer les couples en fixant le premier puis utiliser des formules du binôme. On peut aussi former une bijection avec l'ensembles des fonctions de E dans un ensemble à trois éléments. Le résultat est
$$3^n$$
5. (Cen05) On trouve
$$f(i,j)=\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+j$$
6. (Cen06) On suppose $1\leq p\leq n$. On classe les surjections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments suivant l'ensemble des antécédents d'un élément fixé y de F.
Soit A un tel ensemble d'antécédents. C'est une partie de E dont le complémentaire doit contenir au moins $p-1$ éléments. Elle doit donc contenir au plus $n-p+1$ éléments. Pour toute partie A de E vérifiant cette propriété, il existe une surjection telle que A soit l'ensemble des antécédents de y.
On classe donc les surjections suivant l'ensemble des antécédents de y. Pour une partie fixée à k éléments ($k\leq n-p+1$), ces surjections sont caractérisées par leur restriction au complémentaire de A. Il y en a autant que de surjections de $E\setminus A$ dans $F\setminus\{y\}$ soit $s(n-k,p-1)$. Ce nombre est le même pour toutes les parties A à k éléments. On peut donc les regrouper ce qui fait apparaître des coefficients du binôme. On obtient finalement
$$\begin{aligned}s(n,p)=\sum_{k=1}^{n-p+1}\binom{n}{k}s(n-k,p-1)\\ =\sum_{k=p-1}^{n-1}\binom{n}{k}s(k,p-1)\end{aligned}$$
en numérotant avec $n-k$.
7. (Cen07) Soit n le nombre d'éléments de l'ensemble E.
   - Une opération interne dans E, c'est une application de $E\times E$ dans E. On peut former autant d'opérations que de telles fonctions soit
   $$n^{n^2}$$
   - Pour compter les opérations commutatives dans E, numérotons ses éléments : $E=\{e_1,\cdots e_n\}$.
   Notons T l'ensemble des couples (e_i,e_j) avec $i\leq j$. Il y a autant d'opérations commutatives que d'applications de T dans E. Comme T contient $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments, ce nombre est
   $$n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
   - Choisissons un élément arbitraire a de E et examinons les opérations admettant cet élément comme neutre.
   On doit avoir $ax=xa=x$ pour tous les x de E. Cela définit les images de $2n-1$ couples. Les opérations internes sont définies par les images de tous les autres couples soit
   $$n^{n^2-(2n-1)}$$
   Une opération admet au plus un neutre, en faisant varier le a choisi, on obtient toutes les lois possibles soit
   $$n^{n^2-2n+2)}$$
8. (Cen08) Soit a fixé dans E. Pour toute partie A de E et contenant a, notons $\mathcal{R}_A$ l'ensemble des relations d'équivalence sur E pour lesquelles la classe de a est A. Cet ensemble est clairement en bijection avec l'ensemble des relations d'équivalence sur $E\setminus A$.
Les $\mathcal{R}_A$ forment, lorsque A décrit toutes les parties de E possibles, une partition de l'ensemble des relations d'équivalence sur E.
Classons ces parties A suivant leur nombre d'éléments (au moins 1 car la partie doit contenir a). L'ensemble des parties de E de cardinal k et contenant a est en bijection avec l'ensemble des parties à $k-1$ éléments de $E\setminus\{a\}$. On en déduit :
$$r_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}r_{n-k}$$
En convenant que $r_0=1$ qui correspond dans la formule au cas où $A=E$ et donc à une unique relation d'équivalence, celle avec une seule classe. Dans un singleton, une seule relation d'équivalence est possible, celle avec une seule classe, le singleton lui même. On a donc $r_1=1$.
Dans une paire, il y a deux relations d'équivalence possibles (avec une ou deux classes). On a donc $r_2=2$.
On utilise ensuite la formule trouvée
$$\begin{aligned}r_3&=r_2+2r_1+r_0=5\\ r_4&=r_3+3r_2+3r_1+r_0=15\\ r_5&=r_4+4r_3+6r_2+4r_1+r_0=52\end{aligned}$$
9. pas de correction pour Een09.tex

10. (Cen10) Cet exercice devrait plutôt être placé avec les suites définies par récurrence.
La suite de Fibonacci est définie par une récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique
$$X^2 - X - 1$$
Les racines sont
$$r = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ (nb d'or) et } r' = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) = -\frac{1}{r}$$
Elle s'exprime donc comme combinaison linéaire des suites géométriques de raison r et r'. On trouve
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r^n - r'^n\right)$$
(formules de Binet) On en déduit, avec la formule du binôme,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_{m+k} &= \frac{r^m}{\sqrt{5}}(1+r)^n - \frac{r'^m}{\sqrt{5}}(1+r')^n \\ &= \frac{r^{m+2n}}{\sqrt{5}} - \frac{r'^{m+2n}}{\sqrt{5}} = \phi_{m+2n}\end{aligned}$$
car $r^2 = 1 + r$ et $r'^2 = 1 + r'$.

11. (Cen11) On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des involutions sur un ensemble E. Si E est un singleton, il existe une seule involution qui est aussi l'identité. Si E est une paire, il existe deux involutions, l'identité et la permutation des deux éléments. On a donc
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$$
Dans un ensemble E à n éléments, on fixe un a. On classe les involutions suivant l'image de a. Soit $\mathcal{I}_b$ l'ensemble des involutions f telles que $f(a) = b$. Les $\mathcal{I}_b$, pour b décrivant E, constituent une partition de $\mathcal{I}$.
Pour $b \neq a$ et $f \in \mathcal{I}_b$, on a obligatoirement $f(b) = a$, l'ensemble $\mathcal{I}_b$ est donc en bijection avec $\mathcal{I}(E \setminus \{a,b\})$. Il existe $n-1$ parties de ce type.
En revanche $\mathcal{I}_a$ est en bijection avec $\mathcal{I}(E \setminus \{a\})$. On en déduit finalement :
$$x_n = x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}$$

12. (Cen12) On classe les parisiens suivant leur nombre de cheveux. On note P_i l'ensemble des habitabts ayant exactement i cheveux. Les P_i forment une partition de l'ensemble des parisiens.
Notons n le nombre total de parisiens et p le nombre de cheveux sur le plus chevelu d'entre eux. Notons m le plus petit des $\sharp P_i$ et M le plus grand. Par le plus simple des encadrements appliqué au dénombrement attaché à la partition, il vient
$$(p+1)m \leq n \leq (p+1)M$$
On en déduit
$$m \leq \frac{2500000}{500001} > 4$$
Il existe donc bien dans la partition une classe particulière contenant au moins cinq individus.

13. pas de correction pour Een13.tex

14. Cen14 L'énoncé nous indique de modéliser une main par un ensemble de 5 cartes. Le nombre total de mains est
$$\binom{32}{5}.$$
Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mains contenant exactement un brelan. Pour le démombrer, classons les mains appartenant à $\mathcal{M}$ suivant l'unique brelan qu'elles contiennent. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des brelans. Pour un brelan B donné, notons $\mathcal{M}_B$ l'ensemble des mains contenant B. Alors :
$$\sharp\mathcal{M} = \sum_{B\in\mathcal{B}} \mathcal{M}_B.$$
Combien $\mathcal{M}_B$ contient-il d'éléments ? Autant que de parties à deux éléments qui ne forment pas une paire et ne sont pas de la hauteur du brelan. On les classe suivant l'ensemble des 2 hauteurs quelles consituent. Comme le niveau du brelan est interdit il reste 7 hauteurs et il existe
$$\binom{7}{2}$$
tels ensembles de 2 hauteurs. Comme il existe 4 couleurs, on peut former ces deux hauteurs avec $16 = 4\times4$ couples c'est à dire 8 ensembles de deux cartes.
$$\sharp\mathcal{M}_B = 8 \times \binom{7}{2}.$$
On remarque que ce cardinal est le même pour tous les brelans B. Combien existe-t-il de brelans ?
On classe les brelans suivant leur hauteur puis suivant la couleur qu'ils ne contiennent pas. On en déduit qu'il en existe 8×4. Finalement le nombre de mains cherché est donc
$$8 \times 4 \times 8 \times \binom{7}{2}.$$

15. (Cen15) Dans $[\![1,q]\!]$, on fixe une partie F à 3 éléments (par exemple $\{1,2,3\}$). On classe les parties de $[\![1,q]\!]$ à p éléments selon leur intersection avec F puis on regroupe les parties pour lesquelles cette intersection contient $0,1,2$ ou 3 éléments.
Pour la deuxième formule, on fait la même chose avec une partie F à r éléments. Le $\binom{r}{k}$ compte les parties de F avec k éléments et le $\binom{q-k}{p-r}$ compte les parties à $p-r$ éléments dans le complémentaire de F.

16. pas de correction pour Een16.tex

17. pas de correction pour Een17.tex

18. Cen18 Notons S_1, S_2, S_3 les sommes à calculer.
Dans la première somme, on classe selon le nombre d'éléments.
$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = n\,2^{n-1}.$$
Dans S_2, on classe selon l'intersection. Pour une partie A fixée (avec k éléments), quel sont les (X,Y) tels que $X \cap Y = A$? Ce sont les $(A\cup M, A\cup T)$ avec $M \subset E \setminus A$ et $T \subset E \setminus X$.

Pour un M fixé à m éléments, il existe $2^{n-(k+m)}$ parties T. Le nombre de (X, Y) tels que $X \cap Y = A$ est donc

$$\sum_{m=0}^{n-k} \binom{n-k}{m} 2^{n-k-m} = 3^{n-k}.$$

En considérant tous les A, il vient

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = 4^n.$$