1. (Eev01) Étudier les propositions suivantes en démontrant celles qui sont vraies et en donnant un contre-exemple pour les autres.
   a. $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle et de la loi externe sur $\mathbb{R}$ $\alpha(x,y) = (\alpha x, 0)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
   b. L'ensemble des polynômes à coefficients réels divisibles par X^2+1 est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
   c. Si A et B sont deux parties de E,
   $$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B).$$
   d. La famille
   $$\big((1,j,j^2),(j,j^2,1),(j^2,1,j)\big)$$
   n'admet aucune relation linéaire dans le $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.
2. (Eev02) Soit A et B des parties d'un K-espace vectoriel E. Comparer $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ puis $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.
3. (Eev03) Soit $a_1, \cdots, a_p$ des réels deux à deux distincts et $I = \{a_1, \cdots, a_p\}$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre dans l'espace fonctionnel qui la contient pour les cas suivants.
   a. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on définit f_i dans $\mathbb{R} - I$ par :
   $$f_i(t) = \frac{1}{t-a_i}.$$
   b. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on définit f_i dans $\mathbb{R}$ par :
   $$f_i(t) = |t-a_i|.$$
   c. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, f_i est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a_i, +\infty[$.
4. (Eev04) Soit F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer que
   $$\left.\begin{aligned} F+G &= F+H \\ F\cap G &\subset F\cap H \\ H &\subset G \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = G.$$
5. (Eev05) Dans $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$, on définit F par :
   $$\forall f \in E, f \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}.$$
   On définit $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ avec
   $$\forall i \in [\![0,2]\!],\ e_i(t) = t^i.$$
   Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.
6. (Eev06) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que $f \in E$ est *de signe constant* si et seulement si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ ou $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_-$. Quels sont les sous-espaces de E constitués uniquement de fonctions de signe constant ?
7. (Eev07) Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On pose $x_i = e_1 + \cdots + e_i$ pour tout entier i entre 1 et p. La famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est-elle libre ?
   Même question avec $y_k = e_k - e_{k+1}$ si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ et $y_p = e_p$ ou $y_p = e_p - e_1$.
8. (Eev08) Soit F, G, H des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
   $$F \subset G \Rightarrow F + (G \cap H) = (F+G) \cap (F+H)$$
   et que l'implication réciproque n'est pas vraie.
9. (Eev09) Soit A, B, C des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
   $$(A\cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B+C)$$
   $$A + (B \cap C) \subset (A+B) \cap (A+C)$$
   Donner des contre-exemples pour les inclusions dans l'autre sens.
10. (Eev10) Montrer que l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles telles que $\left(|x_n|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée est un sous espace vectoriel de l'espace de toutes les suites.
11. (Eev14) Soient A, B, C des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E, montrer que :
   $$A + (B \cap (A+C)) = (A+B) \cap (A+C)$$
   $$A \cap (B + (A\cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C)$$
12. (Eev15) Soient A, B, C des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E. On suppose A et B supplémentaires et $A \subset C$.
   Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.
13. (Eev16) Soient A, B, C, D des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E. Montrer que
   $$A\cap B = C \cap D \Rightarrow (A + (B\cap C)) \cap (A + (B \cap D)) = A$$
14. (Eev17) Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}(a,b) = \mathrm{Vect}(u,v)$ pour les vecteurs suivants
   $$a = (1,2,3), b = (1,-1,2), u = (1,5,4), v = (3,0,7)$$
   $$a = (1,1,1), b = (1,-1,1), u = (3,1,3), v = (1,-5,1)$$
   $$a = (0,1,2), b = (1,0,-1), u = (-1,1,3), v = (3,2,1)$$
15. (Eev18) Soit A, B, C, D des sous-espaces vectoriels. Montrer que :
   $$\left.\begin{aligned} A+B &= C+D \\ A &\subset C \\ B &\subset D \\ C \cap D &= \{0_E\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$$
16. (Eev20) Montrer, dans les cas suivants, que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.
   a. E est l'ensemble des suites réelles convergentes, F est l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, G est l'ensemble des suites réelles constantes.

b. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, F est l'ensemble des fonctions affines c'est à dire de la forme $x \to ax + b$ avec a et b réels fixés, G est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

17. (Eev26) Dans $E = \mathbb{R}^4$, on définit deux sous-espaces vectoriels :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$B = \operatorname{Vect}(b_1, b_2) \text{ avec } \begin{cases} b_1 = (1, 2, -1, 0) \\ b_2 = (1, 0, 0, -1) \end{cases}$$

Montrer que A et B sont supplémentaires.

18. (Eev28) Soit E un K-espace vectoriel, soit A, B deux sous-espaces vectoriels de E et C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrer que $A \oplus C = A + B$.

19. (Eev29) Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Pour i entre 1 et n, on note

$$U_i = E_1 + \cdots + E_{i-1} + E_{i+1} + \cdots + E_n$$

Montrer que $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont en somme directe si et seulement si les $U_i \cap E_i = \{0_E\}$.

20. (Eev37) Soit $\mathbf{K}$ un corps *infini* (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On considère une famille finie $A_1, \cdots, A_p$ de sous-espaces vectoriels vérifiant :
– $A_1 \cup \cdots \cup A_p$ est un sous-espace vectoriel de E,
– il existe i et j distincts tels que $A_i \not\subseteq A_j$.
Montrer que

$$A_j \subset \bigcup_{k \neq j} A_k$$

On pourra considérer des $a_i + \lambda x$ avec $x \in A_j$ et $a_i \in A_i$ tel que $a_i \notin A_j$ puis utiliser le *principe des tiroirs*.

> Si on veut ranger strictement plus de q objets dans q tiroirs, au moins un tiroir contient plusieurs objets.

21. (Eev40) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_k(t) = \sin(kt)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

22. (Eev42) Soit $p_1, p_2, \cdots, p_n$ des nombres premiers distincts. Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, montrer que la famille $(\ln(p_1), \ln(p_2), \cdots, \ln(p_n))$ est libre.

1. pas de correction pour Eev01.tex
2. pas de correction pour Eev02.tex
3. pas de correction pour Eev03.tex
4. pas de correction pour Eev04.tex
5. pas de correction pour Eev05.tex
6. (Cev06) Si f est une fonction de signe constant, pour tout λ réel, λf est encore une fonction de signe constant. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(f)$ engendré par une telle fonction est constitué uniquement de fonctions de signe constant (suivant le signe de λ).
On se propose de montrer que ces droites vectorielles sont les seuls sous-espaces constitués uniquement de fonctions de signe constant.
Considérons un couple (f, g) de fonctions non nulles et de signe constant. En multipliant au besoin par -1, on peut supposer qu'elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Supposons que $\mathrm{Vect}(f, g)$ soit constitué uniquement de fonctions de signe constant.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f - \lambda g$ est de signe constant, on peut donc classer les λ suivant le signe de cette fonction. Notons I_+ l'ensemble des λ pour lesquels la fonction est positive et I_- celui pour lesquels $f - \lambda g$ est négative.
Comme $f \geq 0$, $0 \in I_+$. Comme g est non nulle, il existe t tel que $g(t) > 0$. Quel que soit la valeur de $f(t)$ il existe des λ assez grands pour que $f(t) - \lambda g(t) < 0$ donc $f - \lambda g \leq 0$ car la fonction est de signe constant. Un tel λ est dans I_- qui est donc non vide.
$$\forall(\lambda_+, \lambda_-) \in I_+ \times I_-,\ f - \lambda_- g \leq 0 \leq f - \lambda_+ g$$
$$\Rightarrow \lambda_+ \leq \lambda_- \quad (\text{ car } g \geq 0 \text{ et } g \neq 0)$$
On en déduit que I_+ admet une borne sup et I_- une borne inf et qu'elles sont égales. Notons μ la valeur commune. Il reste à montrer que $f - \mu g$ est la fonction nulle.
7. pas de correction pour Eev07.tex
8. (Cev08) à compléter. Pour le contre exemple de la réciproque, on peut prendre F et G supplémentaires dans E et $H = E$.
9. (Cev09) Pour tout $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$,
$$\exists a_B \in A \cap B,\ \exists a_C \in A \cap C \text{ tq } x = a_B + a_C$$
avec $x \in A$ car a_B et a_C dans A et $x \in B + C$ car $a_B \in B$ et $a_C \in C$.
à compléter
Contre-exemple. Si A, B, C sont trois droites deux à deux distinctes dans $E = \mathbb{R}^2$, la somme de deux est E, l'intersection de deux est $\{0_E\}$.
10. (Cev10) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\left(|x_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(|y_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soient bornées. On doit montrer que $\left(|\lambda x_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(|x_n + y_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
$$|\lambda x_n|^{\frac{1}{n}} = |\lambda|^{\frac{1}{n}} |x_n|^{\frac{1}{n}}$$
La suite à droite est bornée comme produit d'une suite qui converge vers 1 et d'une suite bornée. Pour la stabilité par addition, on ne garde que les termes extrêmes dans la formule du binôme :
$$|x_n| + |y_n| \leq \left(|x_n|^{\frac{1}{n}} + |y_n|^{\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$\Rightarrow (|x_n| + |y_n|)^{\frac{1}{n}} \leq |x_n|^{\frac{1}{n}} + |y_n|^{\frac{1}{n}}.$$
On en déduit que $\left(|x_n + y_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Autre solution. Avec X et Y réels tels que , $|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq X$ et idem pour y_n, étudier la limite de $(X^n + Y^n)^{\frac{1}{n}}$ pour majorer.
11. pas de correction pour Eev14.tex
12. pas de correction pour Eev15.tex
13. (Cev16) On suppose $A \cap B = C \cap D$.
Soit $x \in (A + (B \cap C)) \cap (A + (B \cap D))$.
$$x \in A + (B \cap C) \Rightarrow \exists a \in A \text{ et } u \in B \cap C \text{ tq } x = a + u$$
$$x \in A + (B \cap D) \Rightarrow \exists a' \in A \text{ et } v \in B \cap D \text{ tq } x = a' + v$$
Alors :
$$\underbrace{a - a'}_{\in A} = \underbrace{v - u}_{\in B} \Rightarrow v - u \in A \cap B = C \cap D$$
$$\Rightarrow v = \underbrace{(v - u)}_{\in C} + \underbrace{u}_{\in C} \in D \cap C = A \cap B$$
$$\Rightarrow v \in A \Rightarrow x = a' + v \in A$$
L'autre inclusion est immédiate car on peut écrire $a = a + 0_E$ avec 0_E dans tous les sous-espaces vectoriels.
14. (Cev17) On montre que a et b sont combinaisons linéaires de u et v ce qui entraine
$$\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$$
et que u et v sont combinaisons linéaires de a et b ce qui assure l'égalisté des sous-espaces. On trouve
$$u = 2a - b, v = a + 2b,$$
$$a = \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v, b = -\frac{1}{5}u + \frac{2}{5}v$$
$$u = 2a + b, v = -2a + 3b,$$
$$a = \frac{3}{8}u + \frac{1}{8}v, b = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v$$
$$u = a - b, v = 2a + 3b,$$
$$a = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v, b = -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v$$
15. (Cev18) Il suffit de montrer que les conditions entraînent $C \subset A$ et $D \subset B$.
Pour tout $c \in C$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = a + b$ car $c \in C + D = A + B$. On en tire
$$\underbrace{c - a}_{\in C \text{ car } A \subset C} = \underbrace{b}_{\in C \text{ car } B \subset D} \in C \cap D = \{0_E\}$$
donc $c = a \in A$. Ceci montre $C \subset A$. L'autre inclusion $D \subset B$ se démontre de la même manière.

16. (Cev20)
   a. L'intersection entre le sous-espace des suites qui convergent vers 0 et celui des suites constantes est la suite nulle. Toute suite convergente est la somme de la suite constante égale à sa limite et d'une suite qui converge vers 0.
   b. Si $f \in F \cap G$, il existe a et b tels que $f(x) = ax + b$ donc $a = f(0) = 0$ et $b = f'(0) = 0$ car $f \in G$. L'intersection se réduit au vecteur nul. La deuxième propriété est assurée par une décomposition idiote
   $$f(x) = f(0) + f'(0)x + r(x) \quad \text{avec } r(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x.$$
   Il est immédiat que $(x \to f(0) + xf'(0)) \in F$ et $r \in G$.

17. (Cev26) Montrons d'abord que l'intersection se réduit au vecteur nul. Soit $x \in A \cap B$.
$$x \in B \Rightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 \text{ tq } x = \lambda b_1 + \mu b_2 = (\lambda+\mu, 2\lambda, -\lambda, -\mu)$$
alors $x \in A$ entraine
$$\begin{cases} \lambda+\mu+2\lambda-\mu-\lambda = 0_K \\ \lambda+\mu-2\lambda-\lambda+\mu = 0_K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 0_K \\ -2\lambda+2\mu = 0_K \end{cases}$$
d'où $\lambda = \mu = 0_K$ et $x = 0_E$.
Montrons ensuite que tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B. Considérons un vecteur quelconque de E :
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$
et des scalaires λ et μ. On va les choisir pour que
$$y = x - \lambda b_1 - \mu b_2 \in A$$
Par définition de A et par un calcul analogue à celui mené pour l'intersection :
$$y \in A \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = x_1+x_2+x_3+x_4 \\ -2\lambda-2\mu = x_1-x_2+x_3-x_4 \end{cases}$$
Ce système aux inconnues λ et μ admet clairement des solutions. On peut donc décomposer x.
Voir l'exercice **??** (ev33).

18. (Cev28) Montrons que A et C sont en somme directe.
$$C \subset B \Rightarrow B \cap C = C \Rightarrow A \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \{0_E\}.$$
Pour tout $x \in A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme $B = (A \cap B) = C$, il existe $u \in A \cap B$ et $c \in C$ tels que $b = u + c$ d'où
$$x = (a+u) + c \in A + C.$$

19. pas de correction pour Eev29.tex

20. (Cev37) Notons U le sous-espace vectoriel union de tous les A_j. Par hypothèse, il existe $a_i \in A_i$ tel que $a_i \notin A_j$. Soit x quelconque dans A_j, on veut montrer qu'il est dans un A_k avec $k \neq j$.
Considérons,
$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ u_\lambda = a_i + \lambda x \in U$$
car a_i et x appartiennent à U.
Remarquons que $u_\lambda \notin A_j$ sinon a_i serait dans A_j.
$$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \exists k_\lambda \neq j \text{ tq } u_\lambda \in A_{k_\lambda}$$
Comme $\mathbf{K}$ est infini, d'après le principe des tiroirs, il existe un indice k et des scalaires distincts λ, μ tels que
$$\left.\begin{aligned} u_\lambda = a_i + \lambda x \in A_k \\ u_\mu = a_i + \mu x \in A_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\lambda-\mu)x \in A_k \Rightarrow x \in A_k$$

21. (Cev40) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que
$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$
Première méthode.
Il s'agit ici de la *fonction* nulle. Comme les fonctions sont définies par des sin, en dérivant $2m$ fois, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_1 \sin(t) + \lambda_2 2^{2m} \sin(2t) + \cdots + \lambda_n n^{2m} \sin(nt) = 0$$
Fixons un t tel que $\sin(nt) \neq 0$, la suite
$$\left((\frac{1}{n})^{2m} \lambda_1 \sin(t) + \cdots + \lambda_{n-1} (\frac{n-1}{n})^{2m} \sin(nt) + \lambda_n \sin(nt) \right)_{m \in \mathbb{N}}$$
est constante nulle et converge vers $\lambda_n \sin(nt)$. On en déduit $\lambda_n = 0$. On raisonne de la même manière pour les autres coefficients.
Deuxième méthode.
Introduisons une fonction φ
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e^{ikt}$$
et réinterprétons trigonométriquement la relation
$$\begin{aligned} \varphi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \varphi(t) = \overline{\varphi(t)} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e^{-ikt} \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e^{ikt}\right) e^{int} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e^{-ikt}\right) e^{int} \\ \Leftrightarrow \widetilde{P}(e^{it}) = 0 \text{ avec } P = \lambda_n + \lambda_{n-1}X + \cdots + \lambda_1 X^{n-1} \\ - \lambda_1 X^{n+1} - \cdots - \lambda_n X^{2n} \end{aligned}$$
Le polynôme P, de degré au plus $2n$, admet une infinité de racines (tous les nombres complexes de module 1), il est donc nul c'est à dire que tous ses coefficients sont nuls.

22. pas de correction pour Eev42.tex