1. (Efr01) Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples complexes ou réels :
$$\frac{(X+2)}{(X+1)(X^2+1)},\quad \frac{X^2}{(X^2+1)^2},\quad \frac{1}{1-X^2}$$
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)\cdots(X-n)},\quad \frac{1}{(X-1)^2(X-2)}$$
$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2},\quad \frac{X}{X^4+X^2+1},\quad \frac{X^7-X^6-X+1}{(X-1)^5}$$
$$\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos\alpha+1}(\alpha\in\mathbb{R}),\quad \frac{1}{(X^2-1)^2}$$
$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X+1)}$$

2. (Efr02) On rappelle que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\frac{1}{1-X}=1+X+\cdots+X^{n-1}+\frac{X^n}{1-X}$$
En déduire les décompositions en éléments simples de
$$\frac{1}{X^n(1-X)}\qquad \frac{1}{X(1-X)^n}\qquad \frac{1}{(X+1)(X+2)^6}$$

3. (Efr03) Formule de Taylor pour une fraction rationnelle. Soit $F\in\mathbb{C}(X)$ et a un nombre complexe qui n'est pas un pôle de F.
   a. Soit k un entier naturel quelconque, montrer que a n'est pas un pôle de $F^{(k)}$.
   b. Soit n un entier naturel quelconque, on définit une fraction rationnelle R_n par :
$$F=\widetilde{F}(a)+\frac{\widetilde{F'}(a)}{1!}(X-a)+\cdots+\frac{\widetilde{F^{(n)}}(a)}{n!}(X-a)^n+R_n$$
   Montrer que a est un zéro de R_n de multiplicité strictement supérieure à n.
   c. En déduire la décomposition en éléments simples de
$$\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^2}$$

4. (Efr04) Soit $n\geq 2$ dans $\mathbb{N}$ et A_n, B_n dans $\mathbb{Z}[X]$:
$$A_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k+1}X^{2k+1}$$
$$B_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}X^{2k}$$
On définit la fraction rationnelle $F_n=\frac{A_n}{B_n}$ et l'ensemble
$$I_n=[\![0,n-1]\!]\setminus\left\{\frac{n-1}{2}\right\}$$
On remarque que si n est pair, $\frac{n-1}{2}$ n'est pas entier et il n'y a rien à enlever à $[\![0,n-1]\!]$. Pour $k\in I_n$, on note :
$$\theta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2n},\qquad t_k=\tan(\theta_k)$$
   a. Montrer que, pour x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π,
$$\sin(nx)=(\cos(x))^n\widetilde{A_n}(\tan(x))$$
$$\cos(nx)=(\cos(x))^n\widetilde{B_n}(\tan(x))$$
   En déduire que $\tan(nx)=\widetilde{F_n}(\tan(x))$ lorsque $\tan(x)$ n'est pas un pôle de F_n.
   b. Montrer que $\{t_k,k\in I_n\}$ est l'ensemble des racines de B_n. Calculer $\widetilde{A_n}(t_k)$ pour $k\in I_n$.
   c. Quel est le degré de F_n ? Quels sont les pôles de F_n ? Montrer que la décomposition en éléments simples de F_n est
$$-\frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}\frac{1+t_k^2}{X-t_k}\qquad\text{si } n \text{ est pair}$$
$$\frac{1}{n}X-\frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}\frac{1+t_k^2}{X-t_k}\qquad\text{si } n \text{ est impair}$$

5. (Efr05) Soit a un pôle de multiplicité m d'une fraction rationnelle F. Est-il encore un pôle de F' ? et de quelle multiplicité ?

6. (Efr06) Valuations d'une fraction rationnelle.
Pour tout $a\in\mathbb{C}$ et $F\in\mathbb{C}(X)$, on définit $v_a(F)\in\mathbb{Z}$ (*valuation* de F en a) de la manière suivante :
– $v_a(F)=0$ si a n'est ni un pôle ni un zéro de F.
– $v_a(F)=m$ si a est un zéro de F de multiplicité m.
– $v_a(F)=-m$ si a est un pôle de F de multiplicité m.
   a. Montrer que $v_a(F)=m$ si et seulement si il existe des polynômes P et Q tels que $F=(X-a)^m\frac{P}{Q}$ avec $\widetilde{P}(a)\neq 0$ et $\widetilde{Q}(a)\neq 0$.
   b. Soit F et G deux fractions rationnelles. Montrer que $v_a(FG)=v_a(F)+v_a(G)$.
   Montrer que $v_a(F+G)\geq\min(v_a(F),v_a(G))$ avec égalité lorsque $v_a(F)\neq v_a(G)$.
   c. Soit F, G_1, G_2 trois fractions rationnelles vérifiant
$$F^2+G_1F+G_2=0_{\mathbb{C}(X)}$$
   Montrer qu'un pôle de F est soit un pôle de G_1 soit un pôle de G_2.

7. (Efr07) Préciser la fraction R telle que
$$\frac{1}{1+X^2}=1-X^2+X^4+R$$
En déduire la partie polaire relative au pôle 0 de
$$F=\frac{X+1}{X^4(X^2+1)}$$
Achever la décomposition en éléments simples de F.

8. (Efr08) Soit a un nombre complexe non nul. On définit une suite de fractions rationnelles par :
$$F_0=\frac{1-\frac{1}{a}X}{(1+X)(1+aX)(1+a^2X)}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}:\ F_{n+1}=a\widehat{F}_n(aX)$$
En utilisant une décomposition en éléments simples, simplifier
$$F_0+F_1+\cdots+F_n$$

9. (Efr09) Soit $\alpha \neq 0 \mod \pi$ et f définie dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1-2x\cos\alpha + x^2}$$
Former une expression complexe de $f^{(n)}$. En déduire une expression simple de $f^{(n)}(\cos\alpha)$.

10. (Efr10) Soit p naturel non nul, P polynôme de degré $< p$. On définit une fraction F et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
$$F = \frac{P}{X(X+1)\cdots(X+p)} \text{ et } u_n = \widetilde{F}(n)$$
   a. Préciser les coefficients de la décomposition en éléments simples de F. On les notera $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$.
   b. Montrer la convergence de la suite
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
   et exprimer sa limite en fonction des λ_i.

11. (Efr11) Soit $x_1, \cdots, x_n$ complexes non nuls deux à deux distincts et $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que[1]
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^r}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n-1 \\ 1 & \text{si } r = n-1 \\ \displaystyle\sum_j x_j & \text{si } r = n \end{cases}$$

12. (Efr12)
   a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, donner un développement limité à l'ordre 1 en 1 de la fonction $x \to x^k$.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner un développement limité à l'ordre 1 en 1 de
   $$x \to \frac{1}{(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})^2}$$
   c. Calculer la partie polaire relative au pôle 1 de
   $$\frac{1}{(X^n-1)^2}$$
   d. Décomposer en éléments simples de $\mathbf{C}(X)$
   $$\frac{1}{(X^n-1)^2}$$

13. (Efr13) Soit a, b, c dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et deux à deux distincts. Résoudre le système aux inconnues x, y, z
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-1} + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{a+1} = 1 \\ \dfrac{x}{b-1} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{b+1} = 1 \\ \dfrac{x}{c-1} + \dfrac{y}{c} + \dfrac{z}{c+1} = 1 \end{cases}$$

14. (Efr14) Démonstration arithmétique de l'existence et de l'unicité d'une partie polaire.
Soit $a \in \mathbb{C}$ un pôle de multiplicité α de $F \in \mathbb{C}(X)$. Montrer, avec des outils arithmétique qu'il existe un unique polynôme Λ tel que a ne soit pas un pôle de $F - \frac{\Lambda}{(X-a)^\alpha}$ et que $\deg(\Lambda) < \alpha$.

15. (Efr15) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ décomposer dans $\mathbb{R}(X)$,
$$\frac{X^n - 1}{(X^2-1)(X^n-1)}.$$
(Attention à la parité de n)

16. (Efr14) Soit P de racines $z_1, \cdots, z_p$ dans $\mathbb{C}$ avec les multiplicités $m_1, \cdots, m_p$. Soit z une racine de P'. Montrer que
$$0 = \frac{m_1}{|z-z_1|^2}(z-z_1) + \cdots + \frac{m_1}{|z-z_p|^2}(z-z_p).$$

[1] d'après Knuth *Art of Computer Programming* Vol I p36.

1. (Cfr01) On décompose d'abord en éléments simples de première espèce puis de deuxième espèce.

– Calcul facile car tous les pôles sont simples, puis on regroupe les conjugués

$$\frac{(X+2)}{(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-1+3i}{4(X+i)} + \frac{-1-3i}{4(X-i)} = \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-X+3}{2(X^2+1)}$$

– Dans $\mathbb{C}(X)$: deux pôles doubles conjugués (ou opposés).

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{a}{(X-i)^2} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X+i)^2} + \frac{d}{X+i}$$

Par conjugaison (ou parité) : $c = a$, $d = -b$. Par supertildation en i :$a = \frac{-1}{(2i)^2} = \frac{1}{4}$.
Valeur en 0 :

$$0 = -(a+c) + i(b-d) \Rightarrow b = -\frac{i}{4}$$

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4(X-i)^2} - \frac{i}{4(X-i)} + \frac{1}{4(X+i)^2} + \frac{i}{4(X+i)}$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, évident par développement idiot

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}$$

– Deux pôles simples. Calculs faciles.

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{1}{2(1-X)} + \frac{1}{2(1+X)}$$

– Tous les pôles sont simples. Calculs par supertildation en faisant apparaitre un coefficient du binôme.

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)\cdots(X-n)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\frac{(-1)^{n-i}}{X-i}$$

–

$$\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{X-2}$$

–

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{1}{16(X-1)^2} + \frac{1}{8(X-1)} - \frac{1}{16(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)} + R$$

avec

$$R = -\frac{i}{16(X-i)^2} - \frac{1}{8(X-i)} + \frac{i}{16(X+i)^2} - \frac{1}{8(X+i)}$$

ou

$$R = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)}$$

– Les pôles sont les racines carrées de j et j^2 soit j, $-j$, j^2, $-j^2$. On note a, b, c, d les coefficients correspondants. Comme la fraction est réelle, $c = \overline{a}$ et $d = \overline{b}$. Comme la fraction est impaire $b = -a$. On calcule a avec la dérivée du dénominateur :

$$a = \frac{j}{4j^3+2j} = \frac{j}{4+2j}$$

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{\frac{j}{4+2j}}{X-j} - \frac{\frac{j}{4+2j}}{X+j} + \frac{\frac{j^2}{4+2j^2}}{X-j^2} - \frac{\frac{j^2}{4+2j^2}}{X+j^2}$$

On cherche des coefficients réel tels que

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

Par imparité, $a = c$ et $d = -b$. En multipliant par X et en allant à l'infini, on obtient $a = b = 0$. En prenant la valeur en 1, on obtient la valeur de b. Finalement :

$$\frac{X}{X^4+X^2+1} = \frac{\frac{1}{2}}{X^2-X+1} - \frac{\frac{1}{2}}{X^2+X+1}$$

– On peut commencer par factoriser le numérateur et simplifier par $(X-1)^2$. On divise pour obtenir la partie entière et on utilise la formule de Taylor en 1 pour la partie polaire

$$\frac{X^7-X^6-X+1}{(X-1)^5} = X^2+4X+10 + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{15}{(X-1)^2} + \frac{20}{X-1}$$

– Les pôles sont $e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$, $-e^{i\frac{\alpha}{2}}$, $e^{-\frac{\alpha}{2}}$. Ils sont simples. Notons a, b, c, d les coefficients des parties polaires correspondantes. Par conjugaison : $b = \overline{a}$, $d = \overline{c}$. Par parité $c = -a$, $d = -b$. Tout s'exprime donc en fonction de a

$$b = \overline{a} \qquad c = -a \qquad d = -\overline{a}$$

Le calcul de a se fait en supertildant à l'aide de la factorisation

$$a = \frac{e^{i\alpha}}{\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{e^{i\alpha}}{\left(2i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(2e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = -\frac{i}{4\sin\alpha}e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

Finalement

$$\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos\alpha+1}= \frac{-ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{4\sin\alpha(X-e^{i\frac{\alpha}{2}})}+\frac{ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}{4\sin\alpha(X-e^{-i\frac{\alpha}{2}})} +\frac{ie^{i\frac{\alpha}{2}}}{4\sin\alpha(X+e^{i\frac{\alpha}{2}})}+\frac{-ie^{-i\frac{\alpha}{2}}}{4\sin\alpha(X+e^{-i\frac{\alpha}{2}})}$$

– Coefficients indéterminés.

$$\frac{1}{(X^2-1)^2}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1} +\frac{c}{(X+1)^2}+\frac{d}{X+1}$$

Par parité : $c=a$, $d=-b$. Le a est facile à calculer par supertildation $a=\frac{1}{4}$. On peut calculer le b par la méthode servant à prouver l'existence et l'unicité de la partie polaire

$$\frac{1}{(X^2-1)^2}-\frac{1}{4(X-1)^2}=-\frac{X+3}{(X-1)(X+1)^2}$$

On déduit $b=-\frac{1}{4}$. Finalement :

$$\frac{1}{(X^2-1)^2}=\frac{1}{4(X-1)^2}-\frac{1}{4(X-1)} +\frac{1}{4(X+1)^2}+\frac{1}{4(X-1)}$$

– Ne pas oublier la partie entière à calculer par division sans préciser le reste. Le résidu en 1 se calcule par développement limité.

$$\frac{X^4}{(X-1)^2(X+1)}=X+1+\frac{1}{2(X-1)^2} +\frac{7}{4(X-1)}+\frac{1}{4(X+1)}$$

2. pas de correction pour Efr02.tex
3. (Cfr03) Formule de Taylor pour une fraction rationnelle.
   a. Soit F une fraction dont a n'est pas un pôle. Il existe des polynômes P et Q tels que $F=\frac{P}{Q}$ avec $\widetilde{Q}(a)\neq 0$. Les dérivées successives de F sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de Q donc a n'est pôle d'aucune de ces dérivées.
   b. Définissons la fraction R_n par la formule :

$$R_n=F-\left(F(a)+\frac{F'(a)}{1!}(X-a)+\cdots\right)$$

D'après les propriétés algébriques de la dérivation : $R_n^{(k)}(a)=0$ pour $0\leq k\leq n$. En particulier de $R_n(a)=0$, on déduit que a est un zéro de R_n. Soit p sa multiplicité. Il existe alors une fraction G telle que $F=(X-a)^pG$ avec $G(a)\neq 0$. En utilisant la formule de Leibniz, on montre que $R_n^{(p)}(a)=p!G(a)\neq 0$. On en déduit que $p>n$.
En divisant par $(X-a)^{n+1}$, la contribution de la partie principale de la formule de Taylor apparait donc comme la partie polaire en a de la fraction

$$\frac{F}{(X-a)^{n+1}}$$

Cette méthode peut être utile pour chercher la partie polaire d'un pôle avec une multiplicité élecée.
   c. On peut appliquer deux fois la question précédente.

$$\begin{array}{llll} \text{dér. succ. :} & \frac{1}{(X+1)^2}, & \frac{-2}{(X+1)^3}, & \frac{6}{(X+1)^4} \\ \text{val. en } 1: & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{4}, & \frac{3}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{dér. succ. :} & \frac{1}{(X-1)^3}, & \frac{-3}{(X-1)^4} \\ \text{val. en } -1: & -\frac{1}{8}, & -\frac{3}{16} \end{array}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^2}= \frac{\frac{1}{4}}{(X-1)^3}+\frac{\frac{-1}{4}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{3}{16}}{X-1} +\frac{-\frac{1}{8}}{(X+1)^2}+\frac{-\frac{3}{16}}{X+1}$$

4. (Cfr04)
   a. La séparation entre les puissances paires et impaires dans la formule du binôme permet d'écrire

$$\begin{aligned} e^{inx}&=(\cos x+i\sin x)^n\\ &=(\cos x)^n\left(\widetilde{B_n}(\tan x)+i\widetilde{A_n}(\tan x)\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sin(nx)=(\cos(x))^n\widetilde{A_n}(\tan(x)) \quad (1)$$
$$\cos(nx)=(\cos(x))^n\widetilde{B_n}(\tan(x)) \quad (2)$$
$$\tan(nx)=\widetilde{F_n}(\tan(x)). \quad (3)$$

D'après 2, tous les t_k avec $k\in I_n$ sont des racines de B_n. On obtient donc autant de racines que le degré de B_n, ce sont donc *toutes* les racines de B_n ou les pôles de F_n. D'après 1,

$$\widetilde{A_n}(t_k)=\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{\cos^n\theta_k}=\frac{(-1)^k}{\cos^n\theta_k}.$$

   b. Si $n=2p$ est pair,

$$\deg(A_n)=2p-1,\ \deg(B_n)=2p,\ \deg(F_n)=-1.$$

Si $n=2p+1$ est impair,

$$\deg(A_n)=2p+1,\ \deg(B_n)=2p,\ \deg(F_n)=+1.$$

c. Dans le cas impair $n = 2p+1$, la décomposition contient une partie entière qui est le quotient de la division de

$$\begin{aligned} A_n &= (-1)^p X^n + 0X^{n-1} + \cdots \\ &\text{par } B_n = (-1)^p n X^{n-1} + 0X^{n-2} + \cdots \end{aligned}$$

Or

$$A_n = \frac{X}{n} B_n + \text{pol de degré } n-2$$

donc ce quotient est $\frac{X}{n}$.
Dans le cas pair, la décomposition en éléments simples ne comporte pas de partie entière.
La partie polaire relative au pôle t_k est $\frac{\lambda_k}{X - t_k}$ avec

$$\lambda_k = \frac{\widetilde{A_n}(t_k)}{\widetilde{B'_n}(t_k)}.$$

Dérivons la relation 2.

$$\begin{aligned} -n\sin(nx) &= -n(\sin x)(\cos^{n-1} x)\widetilde{B_n}(x) \\ &+ \cos^n x(1+\tan^2 x)\widetilde{B'_n}(\tan x). \end{aligned}$$

Comme $\sin\theta_k = 0$,

$$\begin{aligned} \widetilde{B'_n}(t_k) &= -\frac{n\sin(n\theta_k)}{\cos^{n-2}\theta_k} = \frac{n(-1)^{n+1}}{\cos^{n-2}\theta_k} \\ &\Rightarrow \lambda_k = \frac{-1}{n\cos^2\theta_k} = -\frac{1+t_k^2}{n}. \end{aligned}$$

5. pas de correction pour Efr05.tex
6. pas de correction pour Efr06.tex
7. pas de correction pour Efr07.tex
8. (fr08) Décomposons F_0 en éléments simples

$$F_0 = \frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta}{1+aX} + \frac{\gamma}{1+a^2X}$$

sans calculer tout de suite les coefficients. Écrivons la somme en respectant les colonnes

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\alpha}{1+X} + & \frac{\beta}{1+aX} & + \frac{\gamma}{1+a^2X} & & \\ & \frac{a\alpha}{1+aX} & + \frac{a\beta}{1+a^2X} & + \frac{a\gamma}{1+a^3X} & \\ & & \frac{a^2\alpha}{1+a^2X} & + \frac{a^2\beta}{1+a^3X} & + \frac{a^2\gamma}{1+a^4X} \\ & & & \vdots & \end{array}$$

Un facteur $\gamma + a\beta + a^2\alpha$ se dégage dans le coeur de la sommation. Ce facteur est nul car comme le degré de F_0 est -2, en multipliant par X et en allant à l'infini, il vient

$$\alpha + \frac{\beta}{a} + \frac{\gamma}{a^2} = 0$$

La somme se simplifie en domino et il ne reste que deux termes à chaque extrémité

$$\frac{\alpha}{1+X} + \frac{\beta + a\alpha}{1+aX} + \frac{a^{n-1}\gamma + a^n\beta}{1+a^{n+1}X} + \frac{a^n\gamma}{1+a^{n+2}X}$$

Les coefficients α, β, γ dans F_0 se calculent comme d'habitude

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+\frac{1}{a}}{(1-a)(1-a^2)} \\ \beta &= \frac{1+\frac{1}{a^2}}{(1-\frac{1}{a})(1-a)} \\ \gamma &= \frac{1+\frac{1}{a^3}}{(1-\frac{1}{a^2})(1-\frac{1}{a})} \end{aligned}$$

9. pas de correction pour Efr09.tex
10. pas de correction pour Efr10.tex
11. (Cfr11) On considère

$$F = \frac{X^r}{(X-x_1)\cdots(X-x_n)}$$

Comme les x_i sont non nuls, ce sont les pôles de F et ils sont simples. Décomposons :

$$F = Q + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X - x_j}$$

où Q est la partie entière et

$$\lambda_j = \frac{x_j^r}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}$$

– Si $r < n-1$, $Q = 0$, $XF \to 0$ en l'infini donc

$$\sum_j \lambda_j = 0$$

– Si $r = n-1$, $Q = 0$, $XF \to 1$ en l'infini donc

$$\sum_j \lambda_j = 1$$

– Si $r = n$, $Q = 1$ et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X - x_j} &= F - 1 \\ &= \frac{X^n - (X-x_1)\cdots(X-x_n)}{(X-x_1)\cdots(X-x_n)} \\ &= \frac{(x_1 + \cdots x_n)X^{n-1} + \cdots}{(X-x_1)\cdots(X-x_n)} \end{aligned}$$

d'où en multipliant par X et en allant à l'infini

$$\sum_j \lambda_j = x_1 + \cdots x_n$$

12. pas de correction pour Efr12.tex
13. (Cfr13) On considère une fraction

$$F = \frac{x}{X-1} + \frac{y}{X} + \frac{z}{X+1}$$

Alors, (x, y, z) est solution si et seulement si

$$\widetilde{F}(a) = \widetilde{F}(b) = \widetilde{F}(c) = 1$$

Cela revient à chercher un polynôme A de degré 2 avec des valeurs prescrites en a, b, c :

$$\begin{cases} \widetilde{A}(a) = (a-1)a(a+1) \\ \widetilde{A}(b) = (b-1)b(b+1) \\ \widetilde{A}(c) = (c-1)c(c+1) \end{cases}$$

On peut l'obtenir avec les polynômes d'interpolation de Lagrange en a, b, c. Il reste alors à décomposer la fraction F en éléments simples pour obtenir la solution (x,y,z).

14. (Cfr14) Soit $F = \frac{A}{B}$ un représentant irréductible. Il existe $B_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$B = (X-a)^{\alpha} B_1, \qquad B_1 \wedge (X-a)^{\alpha} = 1.$$

D'après Bezout, il existe $\Lambda, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\Lambda B_1 + (X-a)^{\alpha} V = A.$$

En divisant éventuellement Λ par $(X-a)^{\alpha}$, on peut supposer $\deg(\Lambda) < \alpha$. En divisant par B, on obtient

$$F = \frac{\Lambda}{(X-a)^{\alpha}} + \frac{V}{B_1}.$$

Ceci prouve l'existence. Si U_1, V_1 est un autre couple solution de l'équation de Bezout, en soustrayant,

$$(\Lambda - U_2)B_1 = (V_2 - V)(X-a)^{\alpha} \Rightarrow \Lambda = U_2$$

avec le théorème de Gauss si $\deg(U_2) < \alpha$.

15. pas de correction pour Efr15.tex

16. pas de correction pour Efr16.tex