1. (Efu01) Remplir un tableau des expressions avec des racines carrées des $\cos \frac{p\pi}{q}$ pour $(p,q) \in [\![1,6]\!]$.
2. (Efu02) Résoudre les équations trigonométriques.

$$\sqrt{3}\cos 5x = \cos 2x + \cos 12x \qquad (1)$$
$$\tan 2x = 3\tan x \qquad (2)$$
$$(\sin x)^6 + (\cos x)^6 = \frac{1}{4} \qquad (3)$$
$$2\cos\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{2} = 2 \qquad (4)$$

3. (Evc03) à compléter exercice déplacé
4. (Efu04) Simplifier $\tan 1° \tan 2° \cdots \tan 89°$. Exprimer le produit avec une notation mathématique usuelle (radian).
5. (Efu05) Déterminer tous les réels x tels que

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1$$

6. (Efu06) Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Pour quels x l'équation

$$\arccos\frac{1-x}{1+x} + \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \pi$$

est-elle définie ? Résoudre en posant $x = \tan^2\theta$.

7. (Efu07) Vérifier

$$2\arccos\frac{3}{4} = \arccos\frac{1}{8},$$
$$\arccos\frac{9}{\sqrt{82}} + \arcsin\frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{\pi}{4}.$$

8. (Efu08) Calculer $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.
9. (Efu09) Résoudre $(1+iz)^n + (1-iz)^n = 0$.
10. (Efu10) On admet que pour tout z complexe et n naturel :

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Simplifier

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{4ik\pi}{n}} - 2\cos\theta e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)$$

11. (Efu11) Fonctions réciproques en trigonométrie hyperbolique.
La fonction ch définit une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$, sa bijection réciproque est notée arg ch. La fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque est notée arg sh. La fonction tanh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1[$, sa bijection réciproque est notée arg tanh.
   a. Soit $x \in [1,+\infty[$, exprimer $\operatorname{arg\,ch} x$ à l'aide de ln et de $\sqrt{x^2-1}$.
   b. Soit x un nombre réel, exprimer $\operatorname{arg\,sh} x$ à l'aide de ln et de $\sqrt{x^2+1}$.
   c. Soit $x \in]-1,+1[$, exprimer $\operatorname{arg\,th} x$ à l'aide de ln.
12. (Efu12) Simplifier

$$\arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

et tracer le graphe de $\arccos|\cos\frac{x}{2}|$. Simplifier les expressions

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \arctan\frac{1+x}{1-x},$$
$$\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

13. (Efu13) Résoudre $z^2 - 2z\cos a + 1 = 0$. Interpréter, pour z réel,

$$z^2 - 2z\cos a + 1$$

à l'aide de modules. Résoudre

$$z^{2n} - 2z^n\cos na + 1 = 0$$

14. (Efu14) Calculer $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a)+\operatorname{ch}(b)$, $\operatorname{sh}(a)+\operatorname{sh}(b)$, $\operatorname{ch}(a)-\operatorname{ch}(b)$.
En utilisant la définition des fonctions hyperboliques comme parties paire et impaire de la fonction exponentielle, exprimer $\operatorname{ch} 3x$ et $\operatorname{sh} 3x$ en fonctions de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
15. (Efu15) Dans cet exercice, les expressions contiennent n racines carrées emboitées. Montrer que

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$
$$\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

En déduire

$$\left(2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \pi$$

(Utiliser $(\frac{\sin u_n}{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*} \to 1$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$)

16. (Efu16) Résoudre pour $n \in \mathbb{N}^*$, les équations suivantes d'inconnue complexe z

$$(1) \qquad (1+z)^n = (1-z)^n$$
$$(2) \qquad \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$$

(dans l'équation (2), a n'est pas congru à $0 \mod \frac{\pi}{2}$)

17. (Efu17) Exprimer

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}, \qquad \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \qquad \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

avec respectivement un cosinus hyperbolique, un sinus hyperbolique, une tangente hyperbolique,.

18. (Efu18) Résoudre le système aux inconnues réelles x et y

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

19. (Efu19) Montrer que pour tous les réels x et y tels que $xy \neq 1$, il existe un entier k tel que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$

Préciser sur un dessin la valeur de k pour chaque point de coordonnées (x, y).

20. (Efu20) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$$

21. (Efu21) Montrer que, pour $x \neq 0$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

En déduire une expression de

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} 2^p \operatorname{th}(2^p a).$$

22. (Efu22) Soit A et B des fonctions dérivables dans un intervalle I. On suppose que B ne s'annule pas. Exprimer la dérivée des fonctions

$$\arctan \frac{A}{B}, \qquad \arctan \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

23. (Efu23) Montrer que pour tous les réels $x \neq 0$ et $x \neq -1$,

$$\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x+1} + \arctan \frac{x-1}{x} \equiv 0 \mod \pi$$

Préciser les valeurs de la fonction dans les intervalles de définition.

24. (Efu24) On note $c = \cos x$ et $s = \sin x$ pour x tel que

$$(\cos x)^3 + (\sin x)^3 = 1$$

En considérant $(c^2 + s^2)(c + s)$ et $(c + s)^3$, former une équation de degré 3 dont $c+s$ est une racine. En déduire les x vérifiant la relation.

25. (Efu25) Étudier le signe de

$$A(x) = \sqrt{3 - 4\cos^2 x} - (1 + 3\sin x)$$

26. (Efu26) Soit $s > 0$. Montrer que

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, (x, y) \in]0, 1[^2 \text{ tq } x + y = s \right\}$$

admet un plus petit élément que l'on déterminera.
Même question avec

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, (x, y, z) \in]0, 1[^3 \text{ tq } x + y + z = s \right\}$$

puis généraliser avec une somme de n (naturel quelconque) inverses.

27. (Efu27) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a. En étudiant les variations d'une fonction appropriée, montrer que :

$$\left(1 + \frac{a}{m}\right)^{\frac{m}{n}} < 1 + \frac{a}{n}.$$

b. En déduire que :

$$\forall u > 1,\ u \leq \left(1 + \frac{m(u^{\frac{1}{m}} - 1)}{n}\right)^n.$$

c. Conclure que :

$$\forall u > 1,\ n(u^{\frac{1}{n}} - 1) < m(u^{\frac{1}{m}} - 1).$$

28. (Efu28) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(x + k) = 0$$

29. (Efu29) Montrer, en étudiant une fonction que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ||x| - |y|| \leq |x + z| + |y + z|$$

30. (Efu30) Soit a et b tels que $0 < a < b$. Calculer la dérivée de f

$$x \mapsto \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + bx)}$$

Réduire cette expression au même dénominateur et dériver le numérateur. En déduire les variations de f. Montrer

$$\ln(1 + \frac{a}{b}) \ln(1 + \frac{b}{a}) < (\ln 2)^2$$

31. (Efu31) Inégalité de Gibbs.
Soit $(p_1, \cdots, p_n)$ et $(q_1, \cdots, q_n)$ dans $]0, 1[^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

On veut montrer

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

a. Montrer que

$$\forall x > 0,\ \ln x \leq x - 1$$

b. En déduire l'inégalité annoncée. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

32. (Ere24) Montrer que

$$\arcsin \circ \sin(x) = (-1)^k (x - k\pi) \text{ avec } k = \lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$$

33. (Efu33) Exprimer $\tan(2x), \tan(3x)$ comme des fonctions de $\tan(x)$ seulement. Généraliser avec $\tan(nx)$ pour n entier naturel non nul quelconque.

34. (Efu34) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^k x \cos(kx), \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos^k x \sin(kx)$$

Pour $\cos x \neq 0$, calculer

$$1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

Pour tout x réel, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx, \quad \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx, \quad \sum_{k=0}^{n} \cos^3 kx,$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$$

35. (Efu35) Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique.

a. Soit a et b strictement positifs. En étudiant une fonction bien choisie montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow (n-1)a^n + b^n \geq n a^{n-1} b.$$

b. Soit $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs. On pose

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, \ a = A_{n-1}, \ b = a_n^{\frac{1}{n}}.$$

Montrer que

$$A_n \geq A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} a_n^{\frac{1}{n}}$$

c. Montrer par récurrence que la moyenne géométrique des x_i est inférieure à A_n.

1. pas de correction pour Efu01.tex
2. (Cfu02) Solutions des équations trigonométriques.
   - (1) (transformation d'une somme en produit)
   $$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos(5x) = 2\cos(5x)\cos(7x)$$
   $$\begin{aligned}\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow 5x &\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi\\ \Leftrightarrow x &\equiv \frac{\pi}{10} \mod \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$
   $$\cos(7x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \equiv \frac{\pi}{6} \mod 2\pi \\ \text{ou} \\ 7x \equiv -\frac{\pi}{6} \mod 2\pi \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{42} \mod \frac{2\pi}{7}$$
   - (2) (arc double)
   $$(2) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 3\frac{\sin x}{\cos x}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{2\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 3\dfrac{1}{\cos x} \ (E) \end{cases}$$
   Avec
   $$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 \mod \pi$$
   et
   $$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 2\cos^2 x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x)\\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = 3\sin^2 x \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{6} \mod \pi\end{aligned}$$
   - (3) Désignons $\sin x$ par s et $\cos x$ par c et faisons baisser le degré en remarquant que
   $$\begin{aligned}1 = (c^2+s^2)^3 &= c^6 + 3c^4s^2 + 3c^2s^4 + s^6\\ &= s^6 + c^6 + 3c^2s^2 \Rightarrow s^6 + c^6 = 1 - 3s^2c^2\end{aligned}$$
   Alors :
   $$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 4s^2c^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin(2x))^2 = 1\\ &\Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4} \mod \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
   - (4) On se ramène à des $\frac{x}{6}$ en utilisant
   $$\begin{aligned}\sin 3y &= 3\sin y\cos^2 y - \sin^3 y\\ \cos 2y &= \cos^2 y - \sin^2 y\end{aligned}$$
   On note $s = \sin\frac{x}{6}$ et $c = \cos\frac{x}{6}$, puis on exprime en fonction de s seulement
   $$\begin{aligned}(4) &\Leftrightarrow 2(c^2 - s^2) - 3sc^2 + s^3 = 2\\ &\Leftrightarrow 2(1-2s^2) - 3s(1-s^2) + s^3 = 2\\ &\Leftrightarrow s(4s^2 - 4s - 3) = 0 \Leftrightarrow s(2s-3)(2s+1) = 0\end{aligned}$$
   Comme s est un sinus, $s \neq \frac{3}{2}$. Les solutions sont donc seulement obtenues pour $s = 0$ ou $-\frac{1}{2}$ soit les nombres congrus à 0 modulo π ou à $-\frac{\pi}{6}$ modulo 2π ou à $\frac{7\pi}{6}$ modulo 2π.
3. pas de correction pour Efu03.tex
4. pas de correction pour Efu04.tex
5. pas de correction pour Efu05.tex
6. pas de correction pour Efu06.tex
7. pas de correction pour Efu07.tex
8. pas de correction pour Efu08.tex
9. pas de correction pour Efu09.tex
10. pas de correction pour Efu10.tex
11. pas de correction pour Efu11.tex
12. (Cfu12)
    - Pour arccos $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. Utiliser $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.
    - Pour arcsin $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Noter $x = \tan\theta$ avec $\theta = \arctan x$.
    - Pour arctan $\frac{1+x}{1-x}$. Penser à sin et cos de $x + \frac{\pi}{4}$.
    - Pour arctan $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On remarque que x doit appartenir à $]-1,1]$. Poser $x = \cos\theta$ avec $\theta = \arccos x \in [0,\pi[$.
    - Pour arcsin $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. Poser $x = \tan^2\theta$ avec $\theta = \arctan\sqrt{x}$.
13. pas de correction pour Efu13.tex
14. pas de correction pour Efu14.tex
15. pas de correction pour Efu15.tex
16. pas de correction pour Efu16.tex
17. (Cfu17) Notons $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ les trois expressions à exprimer et utilisons
    $$\operatorname{ch} x + 1 = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right)^2$$
    et la formule analogue pour $\operatorname{ch} x - 1$:
    $$\operatorname{ch} x + 1 = 2\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \operatorname{ch} x - 1 = 2\left(\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)^2$$
    On en déduit
    $$A(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{2}, \qquad B(x) = \left|\operatorname{sh}(\frac{x}{2})\right|$$
    Comme $B(x)$ est définie pour x en dehors de $[-1,1[$, on peut considérer
    $$x = \begin{cases} \operatorname{ch} t \text{ si } x \geq 1 \\ -\operatorname{ch} t \text{ si } x < -1 \end{cases}$$
    On en tire, pour $x \geq 0$,
    $$C(x) = \begin{cases} \operatorname{th}\dfrac{t}{2} \text{ si } x \geq 1 \\ \dfrac{\operatorname{ch}\frac{t}{2}}{\operatorname{sh}\frac{t}{2}} \text{ si } x < -1 \end{cases}$$
18. (Cfu18) Après réduction au même dénominateur de la première équation, le système devient
    $$\begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x)\ \cos(y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
    $$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1 \end{cases}$$
    $$\Leftrightarrow$$

D'après la première équation, on doit avoir
$$\cos(x+y) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Mais dans la deuxième équation, seul
$$\cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
est possible, sinon le cos serait plus grand que 1. On en tire qu'il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que
$$x+y = \frac{\pi}{6} + 2u\pi$$
et la deuxième équation s'écrit :
$$\cos(2x - \frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Finalement, les solutions sont données par :
$$\begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{12} \pm \alpha \mod \pi \\ y \equiv -\frac{\pi}{6} + x \mod 2\pi \end{cases}$$
avec
$$\alpha = \arccos(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

19. pas de correction pour Efu19.tex
20. pas de correction pour Efu20.tex
21. pas de correction pour Efu21.tex
22. pas de correction pour Efu22.tex
23. (Cfu23) Notons respectivement α, β et γ les trois termes et calculons
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{x+1}}{1 + \frac{1}{2x^2}\frac{x}{x+1}} = \frac{-2x^3+x+1}{2x^3+2x^2+x} = \frac{(1-x)(2x^2+2x+1)}{x(2x^2+2x+1)} = \frac{1-x}{x}$$
en divisant $-2x^3+x+1$ par $-x+1$ car 1 est une racine évidente. Ceci permet de conclure :
$$\tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \equiv 0 \mod \pi$$
Calcul de la valeur de la somme.
– Dans $]-\infty,-1[$. Limite en $-\infty$: $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.
– Dans $]-1,0[$. Limite à gauche de 0 : $\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} = \pi$.
– Dans $]1,+\infty[$. Limite en $+\infty$: $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.
24. (Cfu24) Avec les indications de l'énoncé et $c^3+s^3=1$:
$$\left.\begin{aligned} c+s = (c^2+s^2)(c+s) = 1 + c^2s + cs^2 \\ (c+s)^3 = 1 + 3(c^2s+cs^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (c+s)^2 - 3(c+s) = -2$$
Or 1 est racine évidente de
$$z^3 - 3z + 2 = 0$$
En divisant par $z-1$, on factorise :
$$z^3 - 3z + 2 = (z-1)^2(z-2)$$
On doit donc avoir $c+s=1$ c'est à dire x congru à $\frac{\pi}{2}$ ou 0 modulo 2π.
25. (Cfu25) Examinons s'il existe des x tels que $A(x)=0$.
$$\begin{aligned} A(x) = 0 &\Rightarrow 3 - 4\cos^2 x = (1+3\sin x)^2 \\ &\Rightarrow -2 + 9\sin^2 x + 4\cos^2 x + 6\sin x = 0 \\ &\Rightarrow 2 + 5\sin^2 x + 6\sin x = 0 \end{aligned}$$
Or l'équation $5z^2+6z+2=0$ est sans racine réelle car de discriminant -4.
La fonction A garde donc un signe constant dans chacun de ses intervalles de définition $I_+ = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ et $I_- = [-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}]$.
Comme $A(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3} - 4 < 0$ et $A(-\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}+4 > 0$, la fonction A est négative dans I_+ et positive dans I_-.
26. pas de correction pour Efu26.tex
27. (Cfu27)
    a. Étudier $f : x \mapsto (1 + \frac{m}{n}x)^{\frac{m}{n}} - 1 - x$, puis utiliser $f(\frac{a}{n})$.
    b. Exprimer a pour que $u = (1+\frac{a}{m})^m$ puis utiliser l'inégalité de la question a.
    c. Commencer par prendre la puissance $\frac{1}{n}$ de l'inégalité du b.
28. (Cfu28) En utilisant la définition de sh et la propriété fondamentale de l'exponentielle puis en multipliant par 2, on écrit
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(x+k) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} e^x e^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x} e^{-k} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-k}}{\sum_{k=0}^{n-1} e^k} = \frac{1 + e^{-1} + \cdots + e^{-(n-1)}}{1 + e^1 + \cdots + e^{n-1}} \\ &= \frac{e^{-(n-1)}\left(e^{n-1} + e^{n-2} + \cdots + 1\right)}{1 + e^1 + \cdots + e^{n-1}} = e^{1-n} \end{aligned}$$
Comme la fonction exponentielle réelle est bijective, il existe une unique solution :
$$\frac{1-n}{2}$$
29. (Cfu29) Pour x et y fixés, considérons la fonction f
$$z \mapsto |x+z| + |y+z|$$
Pour fixer les idées supposons que $x < y$. Les valeurs absolues changent de signe en $-x$ et $-y$ (avec $-y < -x$). On en déduit que f est constante entre $-y$ et $-x$ de valeur
$$x + z - y - z = x - y$$
Dans le cas général, on a toujours un intervalle sur lequel la fonction est constante et de valeur
$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$$
On a donc prouvé
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x-y| \leq |x+z| + |y+z|$$
On termine avec la relation de cours conséquence de l'inégalité triangulaire
$$||x| - |y|| \leq |x-y|$$

30. pas de correction pour Efu30.tex
31. pas de correction pour Efu31.tex
32. pas de correction pour Efu32.tex
33. pas de correction pour Efu33.tex
34. (Ccu16) Nommons $A, B, \cdots, G$ les sommes que l'on nous demande de calculer.

$$A + iB = \sum_{k=1}^{n} (\cos x\, e^{ix})^k = \frac{1 - (\cos x)^n\, e^{nix}}{1 - \cos x\, e^{ix}} (\cos x\, e^{ix})$$

Or

$$\frac{e^{ix}}{1 - \cos x\, e^{ix}} = \frac{1}{e^{-ix} - \cos x} = \frac{i}{\sin x}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{(\cos x)^{n+1} \sin(nx)}{\sin x} \\ B = \dfrac{\cos x (1 - (\cos x)^n \cos(nx))}{\sin x} \end{cases}$$

La troisième somme est la partie réeelle d'une somme géométrique de raison

$$\frac{e^{ix}}{\cos x} \quad \text{avec} \quad 1 - \frac{e^{ix}}{\cos x} = -i \tan x$$

$$C = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \right) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x (\cos x)^n}$$

Pour D, E, F on linéarise :

$$\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2u), \qquad \sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2u),$$
$$\cos^3 u = \frac{1}{4} \left(\cos(3u) + 3 \cos u \right)$$

$$D = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)2x}}{1 - e^{i2x}} \right)$$
$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin(x)}$$
$$E = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin((n+1)x) \cos(nx)}{\sin(x)}$$

35. pas de correction pour Efu35.tex