

1. (Eg_c01) Une partie A de \mathbb{R} est dite *ouverte* si et seulement si, pour tout $a \in A$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset A$. Soit f une fonction continue dans \mathbb{R} pour laquelle l'ensemble Ω des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) > 0$ est non vide. Montrer que Ω est une partie ouverte de \mathbb{R} .

2. (Eg_c02) Montrer qu'une fonction continue et périodique est bornée.

3. (Eg_c03) Soit f définie dans \mathbb{R} , continue en 0 et telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est continue dans \mathbb{R} .

4. (Eg_c04) Soit f continue sur $[a, b[$ qui diverge en b vers $+\infty$. Montrer que, pour tout $A > f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = A$.

5. (Eg_c05) Soit p et q réels strictement positifs et f continue dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$$

6. (Eg_c06) Montrer qu'une fonction continue dans \mathbb{R} qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ est minorée et atteint sa borne inférieure.

7. (Eg_c07) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall x \in \left]0, \frac{7}{10}\right], f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x).$$

Montrer que f s'annule au moins 7 fois.

8. (Eg_c08) Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. On définit une partie \mathcal{T} de $]0, b - a]$ par :

$$T \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists x \in [a, b - T] \text{ tq } f(x + T) = f(x)$$

a. On suppose $f(a) = f(b) > \min_{[a,b]} f = f(x_{min})$ avec $x_{min} \in]a, b[$. On note

$$\alpha = \min(x_{min} - a, b - x_{min})$$

Montrer que $\mathcal{T} \neq \emptyset$ et $]0, \alpha] \subset \mathcal{T}$.

b. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]0, \alpha] \subset \mathcal{T}$.

c. Montrer que $\frac{b-a}{n} \in \mathcal{T}$ pour tout n naturel non nul. On pourra considérer

$$\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - f(a)\right) + \left(f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)\right) + \dots$$

d. Préciser \mathcal{T} pour \sin sur $[0, 3\pi]$.

9. (Eg_c09) Montrer qu'une fonction continue dans \mathbb{R} et admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ est bornée.

10. (Eg_c10) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0, 1], f(x) = x\}$. Montrer que E_f est non vide et que c'est un intervalle.

11. (Eg_c11) Soit $I = [a, b]$ et f continue dans I . On définit des fonctions F et G dans I par :

$$\forall x \in I : F(x) = \sup_{[a,x]} f, G(x) = \inf_{[a,x]} f$$

a. Montrer que F et G sont monotones (préciser le sens).

b. Montrer que

$$F(I) = \left[f(a), \max_{[a,b]} f \right]$$

puis que F est continue. Montrer de même que G est continue en précisant son image.

c. On suppose maintenant que l'intervalle I est toujours fermé en son extrémité gauche a mais il peut être borné ou non, fermé ou non en son extrémité droite. Montrer que les fonctions F et G sont bien définies et qu'elles sont continues.

12. (Eg_c12) Montrer qu'il existe une fonction f continue de $[0, 2]$ dans $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 2], f(x)^5 + f(x) = x$$

13. (Eg_c13)

a. Montrer que

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$$

b. Généralisation. Soit $I = [0, +\infty[$, f continue et strictement croissante de I dans I . On considère deux propriétés :

$$(1) \quad \forall x \in I : \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$$

Montrer que ces deux propriétés sont équivalentes.

14. (Eg_c14) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une application *injective et continue* définie dans I . On se propose de montrer que f est strictement monotone.

Pour u, v, w dans I tels que $u < v < w$, on nomme $I_1(u, v, w)$, $I_2(u, v, w)$, $I_3(u, v, w)$ les trois implications suivantes.

$$I_1(u, v, w) : (f(v) < f(w) \Rightarrow f(u) < f(v))$$

$$I_2(u, v, w) : (f(u) < f(w) \Rightarrow f(u) < f(v) < f(w))$$

$$I_3(u, v, w) : (f(u) < f(v) \Rightarrow f(v) < f(w))$$

a. On veut prouver ces trois implications.

On considère $u < v < w$ fixés dans I . On va exploiter l'injectivité de f et le théorème des valeurs intermédiaires pour tirer des conséquences de certaines inégalités entre des images.

Dans le tableau suivant, ces inégalités figurent dans la colonne de gauche et leurs conséquences dans celle de droite.

inégalité	intervalle	conséquence
$f(v) < f(w)$		$f(u) \notin [f(v), f(w)]$
$f(v) < f(w)$		$f(u) \geq f(w)$ faux
$f(u) < f(w)$		$f(v) \leq f(u)$ faux
$f(u) < f(w)$		$f(v) \geq f(w)$ faux
$f(u) < f(v)$		$f(w) \notin [f(u), f(v)]$
$f(u) < f(v)$		$f(w) \leq f(u)$ faux

Compléter ce tableau en indiquant dans la colonne du milieu un intervalle dans lequel l'application du théorème des valeurs intermédiaires (associé à l'injectivité de f) prouve la conséquence à droite.

- b. On suppose qu'il existe $a < b$ dans I tel que $f(a) < f(b)$.

On veut montrer que f est strictement croissante en considérant dans le tableau suivant les différents cas possibles pour $x < y$ quelconques dans I .

cas	arguments
$x < y < a < b$	puis
$x < a < y < b$	puis
$x < a < b < y$	puis
$a < x < y < b$	puis
$a < x < b < y$	puis
$a < b < x < y$	puis

Compléter ce tableau en justifiant que $f(x) < f(y)$. C'est argumentation sera constituée par deux implications successives de la forme (I) indiquée au début pour un bon choix des lettres et de l'indice. (plusieurs réponses sont possibles)

- c. Montrer le résultat annoncé.

15. (Egc15) Soit φ une application strictement décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer qu'il n'existe pas d'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue et vérifiant

$$f \circ f = \varphi$$

Existe-t-il une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f(x) + x = 0$$

16. (Egc16) Soit f et g deux fonctions continues d'un segment $I = [a, b]$ dans lui-même et telles que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f^n, \quad \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}} = g^n$$

- a. Soit $m = \min_I (f - g)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^n(x) \geq g^n(x) + nm$$

- b. Montrer $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

17. (Egc17) Montrer qu'une fonction f continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet un point fixe.

18. (Egc18) Soit E l'ensemble des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

- a. Montrer que E est stable pour l'addition fonctionnelle et la multiplication par un réel (sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues).

- b. Soit f dans E s'annulant en deux points distincts. Montrer que f est la fonction nulle. On pourra utiliser une suite dichotomique.

- c. Montrer que E est l'ensemble des fonctions affines.

- d. Déterminer toutes les fonctions continues de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x) + f(y)}$$

- e. Déterminer toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$$

19. (Egc19) Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle ouvert I . On suppose que f admet aux extrémités de I la même limite (finie ou $\pm\infty$). Montrer que f n'est pas injective.

20. (Egc20) Déterminer toutes les fonctions continues f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

21. (Egc21) Soit f une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

- a. Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

- b. En écrivant $x = (\sqrt{x})^2$ pour $x > 0$, montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .

- c. En déduire que f est continue sur \mathbb{R} puis que c'est l'identité.

22. (Egc22) Soit f continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.

23. (Egc23) Montrer que toute fonction strictement décroissante et continue dans \mathbb{R} admet un unique point fixe.

24. (Egc24) Soit a_0, a_1, \dots, a_n des nombres réels. On suppose $a_0 < 0$ et on considère la fonction polynomiale

$$x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^{n+1}$$

Montrer que cette fonction s'annule dans $]0, +\infty[$.

25. (Egc25) Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que, pour tout intervalle ouvert I , $f(I)$ soit un intervalle ouvert. Montrer que f est strictement monotone.

26. (Egc26) Soit f une fonction continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{+\infty} l < 1$$

Montrer que f admet un point fixe.

1. (C_{gc01}) pas encore de correction
2. pas de correction pour Egc02.tex
3. pas de correction pour Egc03.tex
4. pas de correction pour Egc04.tex
5. pas de correction pour Egc05.tex
6. pas de correction pour Egc06.tex
7. pas de correction pour Egc07.tex
8. (C_{gc08}) Par hypothèse $b - a \in \mathcal{T}$.
 - a. On suppose (faire un dessin)

$$a < x_{min} < b \text{ avec } f(x_{min}) < f(a) = f(b)$$
 Soit $T \in]0, \alpha]$. Alors $x_{min} - T$ et $x_{min} + T$ sont dans $[a, b]$ par définition de α . Définissons g :

$$g : \begin{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x + T) - f(x) \end{pmatrix}$$
 Comme x_{min} réalise la plus petite valeur de f :

$$g(x_{min} - T) \leq 0 \text{ et } g(x_{min}) \geq 0$$
 On peut alors appliquer le TVI pour justifier que $T \in \mathcal{T}$.
 - b. Si $f(a) = f(b)$ n'est pas la plus grande valeur de f , on peut raisonner avec la valeur maximale comme en a. Si $f(a) = f(b)$ est à la fois la plus grande et la plus petite valeur de f c'est qu'elle est constante.
 - c. à compléter
 - d. à compléter
9. pas de correction pour Egc09.tex
10. (C_{gc10}) Comme f est continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, elle admet un point fixe (exercice 17 (Egc17)) donc E_f est non vide. Pour montrer que E_f est un intervalle, nous allons montrer que c'est une partie convexe. C'est à dire que

$$\forall (a, b) \in E_f^2, a < b \Rightarrow [a, b] \subset E_f$$
 Considérons donc un c tel que $a < c < b$. Comme $a = f(a)$ et $b = f(b)$, le nombre c est entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $c = f(x)$. On compose par f :

$$f(c) = f \circ f(x) = f(x) = c \Rightarrow c \in E_f$$
 On pouvait aussi démontrer que $E_f = f([0, 1])$ par une double inclusion facile.
11. pas de correction pour Egc11.tex
12. pas de correction pour Egc12.tex
13. (C_{gc13})
 - a. De la croissance des fonctions partie entière et racine carrée, on déduit

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Notons

$$m_x = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \in \mathbb{N}$$

On a donc $m_x \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ d'où $m_x \leq \sqrt{x}$. On veut montrer que $m_x = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ c'est à dire, par définition de la partie entière, que $\sqrt{x} < m_x + 1$. On raisonne par l'absurde :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \geq m_x + 1 &\Rightarrow x \geq (m_x + 1)^2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq (m_x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{\lfloor x \rfloor} \geq m_x + 1 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow m_x = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor \geq m_x + 1 \end{aligned}$$

Absurde

- b. Montrons d'abord que (1) entraîne (2). On commence par reformuler (1). Pour tout x de I notons

$$m_x = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

Comme la fonction f est croissante, on a toujours

$$f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$$

La condition (1) se traduit donc par :

$$\forall x \in I : m_x \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) < m_x + 1$$

Cette condition entraîne l'implication (2). En effet, lorsque $f(x) \in \mathbb{Z}$, $f(x) = m_x$ et l'encadrement précédent devient :

$$f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) < f(x) + 1$$

Cela entraîne $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ qui ne se produit (croissance stricte) que si $x = \lfloor x \rfloor$ c'est à dire si x est entier.

Remarquons que la continuité de f n'est pas intervenue dans ce raisonnement.

Montrons que (2) entraîne (1). Exprimons une conséquence de (2) et de la continuité de f .

L'image par f d'un intervalle ne contenant qu'un seul entier est un intervalle contenant *au plus* un entier.

En particulier, lorsque $a \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(a) \in \mathbb{Z} &\Rightarrow f(a + 1) \leq f(a) + 1 \\ f(a) \notin \mathbb{Z} &\Rightarrow f(a + 1) \leq \lfloor f(a) \rfloor + 1 \end{aligned}$$

Cela entraîne dans les deux cas :

$$\lfloor f(a) \rfloor \leq f(a + 1) \leq \lfloor f(a) \rfloor + 1$$

Lorsque $a = \lfloor x \rfloor$, cette inégalité s'écrit (avec la notation m_x) :

$$m_x \leq f(\lfloor x \rfloor + 1) \leq m_x + 1$$

Or $x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $f(x) < f(\lfloor x \rfloor + 1)$ et on a bien l'encadrement caractéristique de (1) :

$$\forall x \in I : m_x \leq f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) < m_x + 1$$

14. pas de correction pour Egc14.tex

15. (C_{gc15}) L'application φ est strictement décroissante donc injective. La relation $f \circ f = \varphi$ implique que f est injective. Comme elle est continue, elle est strictement monotone d'après le théorème de cours démontré dans l'exercice Egc14. Mais alors $f \circ f$ devrait être strictement croissante en contradiction avec l'hypothèse. Il n'existe donc par de f continue vérifiant $f \circ f(x) = -x$.

16. (C_{gc16})

a. On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$,

$$\forall x \in I, m \leq f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x) + 1 \times m$$

Montrons que l'inégalité pour n entraîne celle pour $n + 1$. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^n(f(x)) \\ &\geq g^n(f(x)) - nm \quad (\text{hyp. recu en } f(x)) \\ &= f(g^n(x)) - nm \quad (\text{permut. } f \text{ et } g) \\ &\geq g(g^n(x)) - m - nm \quad (\text{def. de } m) \\ &= g^{n+1}(x) - (n+1)m \end{aligned}$$

b. Comme $g([a, b]) \subset [a, b]$, l'inégalité précédente entraîne $f^n(x) \geq a + nm$. Comme f aussi est à valeurs dans $[a, b]$, la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par b ce qui entraîne $m \leq 0$ (sinon il y aurait divergence vers $+\infty$).

Notons $M = \max_I(f - g)$. Alors

$$M = -\min_I(g - f)$$

On échange les rôles de f et g pour conclure que $M \geq 0$. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

17. (C_{gc17}) On définit g dans $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - x$$

alors $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. on peut appliquer à g (continue) le théorème des valeurs intermédiaires. Un c tel que $g(c) = 0$ est un point fixe pour f .

18. pas de correction pour Egc18.tex

19. (C_{gc19}) Une première manière de résoudre cet exercice est d'évoquer le théorème de cours : une fonction continue et injective sur un intervalle et strictement monotone. Puis de justifier soigneusement que la stricte monotonie interdit l'égalité des limites.

L'outil semble disproportionné, proposons une preuve directe dans le cas où la limite commune est $l \in \mathbb{R}$ et la fonction non constante.

Il existe alors $u \in I$ tel que $f(u) \neq l$, par exemple $f(u) > l$. Comme les limites aux extrémités sont l , il existe un a assez proche de l'extrémité gauche et un b assez proche de l'extrémité droite tels que

$$f(a) < \frac{f(u)+l}{2} \quad f(b) < \frac{f(u)+l}{2}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires dans $[a, u]$ et dans $[u, b]$, on prouve l'existence de deux antécédents distincts de $\frac{f(u)+l}{2}$ ce qui prouve que f n'est pas injective.

Adapter cette démonstration dans les autres cas.

20. (C_{gc20}) Notons φ_k et ψ_k les fonctions proposées

$$\varphi_k(x) = f(x) - kx, \quad \psi_k(x) = f(x) + kx$$

a. Pour tous $x < y$ dans I :

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) - \varphi_k(x) &= f(y) - f(x) - k(y-x) \\ &\leq |f(y) - f(x)| - k(y-x) \leq k(|y-x| - (y-x)) \\ &= k((y-x) - (y-x)) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit φ_k décroissante.

On démontre de même que ψ_k est croissante.

b. Le caractère lipschitzien sur $]a, b[$ entraîne que la fonction f est bornée. Il en est de même pour φ_k et ψ_k qui admettent donc des limites finies en a et b par monotonie bornée. Comme f peut s'exprimer comme une combinaison de ces fonctions elle admet aussi des limites finies. Le caractère lipschitzien est conservé en a et b à cause du théorème de passage à la limite dans une inégalité.

c. à compléter.

21. (C_{gc21})

a. De la relation additive on tire $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$ pour tous les x . De la relation multiplicative, on tire $f(1) = 1$ car la fonction étant bijective, il existe un x tel que $f(x) \neq 0$. De plus

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(px) = pf(x)$$

En prenant $x = 1$, on en déduit $f(p) = p$. Pour $p \neq 0$, en prenant $x = \frac{1}{p}$, on tire $f(\frac{1}{p}) = \frac{1}{f(p)}$.

Avec la propriété multiplicative, on déduit $f(x) = x$ pour tout x rationnel.

b. Soit $x < y$. Alors

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + f(y-x) = f(x) + f(\sqrt{y-x}^2) \\ &= f(x) + f(\sqrt{y-x})^2 > 0 \end{aligned}$$

L'inégalité est stricte car la fonction est bijective avec $f(0) = 0$.

c. La fonction est croissante et surjective donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ est un intervalle. Une fonction monotone sur intervalle et dont l'image est un intervalle est continue donc la fonction f est continue. En approchant par densité un x irrationnel par une suite de nombres rationnels, on montre en utilisant la continuité en x que $f(x) = x$.

22. (C_{gc22}) à compléter

23. (C_{gc23}) L'unicité d'un éventuel point fixe est immédiate car $x \rightarrow f(x) - x$ est strictement décroissante.

Pour l'existence, on commence par remarquer que $f \xrightarrow{-\infty} -\infty$ et $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$ sont faux.

Si on avait $f(x) - x \leq 0$ pour tous les x on aurait $f(x) \leq x$ et donc $f \xrightarrow{-\infty} -\infty$. Il existe donc un x_1 tel que $f(x_1) - x_1 > 0$.

De même, si on avait $f(x) - x \geq 0$ pour tous les x on aurait $f(x) \geq x$ et donc $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$. Il existe donc un x_2 tel que $f(x_2) - x_2 < 0$.

On conclut par le théorème de la valeur intermédiaire.

- 24. pas de correction pour Egc24.tex
- 25. pas de correction pour Egc25.tex
- 26. pas de correction pour Egc26.tex