1. (Egd01) Soit f et g des fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, on suppose que g' ne s'annule pas et que $g(a) \neq g(b)$. Montrer que $g(b) \neq g(a)$ et qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
2. (Egd02) Soit f une fonction continue dans $I = [a,+\infty[$, dérivable dans I et qui converge vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.
3. (Egd03) Montrer les inégalités suivantes :
$$\begin{aligned}
\forall x &\in \mathbb{R},\ 1-\frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \\
\forall x &\geq 0,\ x-\frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x \\
\forall x &\geq 0,\ x-\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x \\
\forall x &\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ x+\frac{1}{3}x^3 \leq \tan x \\
\forall x &\in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x
\end{aligned}$$
4. (Egd04) Soit $\lambda < \frac{1}{4!}$, montrer qu'il existe un intervalle contenant 0 dans lequel $1-\frac{1}{2}x^2+\lambda x^4 \leq \cos x$.
5. (Egd05) Montrer que, $\forall \alpha \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$
En déduire la limite de $\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{1-\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. (Egd06) Soit f dérivable sur $[0,1]$, strictement positive sur $]0,1[$ et nulle en 0. Etant donnés α et β strictement positifs, montrer qu'il existe c dans $]0,1[$ tel que
$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad \text{(utiliser } f(x)^\alpha f(1-x)^\beta)$$
7. (Egd07) Soit f définie dans $\mathbb{R}$ par
$$f(t) = (t^2-1)^n$$
   a. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que 1 et -1 sont des zéros de $f^{(k)}$ pour k entre 0 et $n-1$.
   b. Montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros distincts dans l'intervalle $]-1,1[$.
8. (Egd08) Soit $I = [-1,1]$, $\alpha > 0$. Un fonction f dérivable dans I est dite $\alpha-\mathcal{G}$ si et seulement si [1] :
$$\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq \alpha\,|f(x)|$$
   a. On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit $\alpha-\mathcal{G}$.
   b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit f une fonction $\alpha-\mathcal{G}$, soit g une fonction $\beta-\mathcal{G}$, soit $\psi \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que $\psi(I) \subset I$. Préciser pour chaque fonction λf , fg, $f\circ\psi$ un $\gamma > 0$ tel qu'elle soit $\gamma-\mathcal{G}$.
   c. Soit f une fonction $\alpha-\mathcal{G}$ et à valeurs positives ou nulles. Étudier les variations de $\varphi = (x \mapsto f(x)e^{-\alpha x})$.
   Que peut-on en déduire si $f(0) = 0$? En utilisant $\psi = (x \mapsto -x)$ montrer que f est la fonction nulle.
   d. Soit f une fonction $\alpha-\mathcal{G}$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
   e. Montrer que toute fonction $\alpha-\mathcal{G}$ qui s'annule est identiquement nulle. On pourra considérer, pour $\lambda > 0$, des fonctions
$$\psi_\lambda :\ x \mapsto -1+2\left(\frac{1+x}{2}\right)^\lambda$$
9. (Egd09) On définit une fonction f dans $[0,+\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
   a. Montrer que f est continue dans $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]0,+\infty[$.
   b. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une fonction P_n polynomiale tel que
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$
   Préciser P_1, P_2, P_3. Former une relation liant P_n, P'_n et P_{n+1}. En déduire que P_n est une fonction polynomiale. Préciser son degré, la valeur $P_n(0)$ et le coefficient du terme de plus haut degré.
   c. Former un équivalent de $f^{(n)}$ strictement à droite de 0 et montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[)$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tous les entiers n.
   d. Montrer que P_n admet $n-1$ racines strictement positives distinctes.
10. (Egd10) Soit f dérivable dans I et $a \in I$ un point fixe de f c'est à dire tel que $f(a) = a$. Pour tout naturel n, on note
$$f^n = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$$
Calculer la valeur en a de la dérivée de f^n.
11. (Egd11) Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$
On pourra considérer la fonction auxiliaire
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\left(f'(a)+f'(x)\right) - (x-a)^3 A$$
où A est un réel à choisir.
12. (Egd12) Soit $f \in \mathcal{C}^1(0,+\infty[)$ et a un réel strictement positif tels que :
$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f(a) = 0$$
Montrer qu'il existe un point M du graphe (autre que l'origine) tel que la tangente en M passe par l'origine.

[1] $\mathcal{G}$ pour Gronwall : une notion utile pour certaines majorations liées aux équations différentielles

13. (Egd13) Soit a et b deux réels, $|a| \neq 1$. On définit φ :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = ax + b$$
On note u l'unique point fixe de φ.
   a. Soit f définie dans $\mathbb{R}$, continue en u et telle que $f \circ \varphi = f$. Montrer que f est constante.
   b. Soit f définie dans $\mathbb{R}$ et telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$. On cherche à montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda(x - u) + u$$
   Montrer le si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer le sous la seule hypothèse : f dérivable en u. On pourra considérer
$$\tau : x \mapsto \frac{f(x) - u}{x - u}$$
   c. Étudier l'équation fonctionnelle $f \circ f = \varphi$ où f est définie dans $\mathbb{R}$ et dérivable en u.

14. (Egd14) Soit f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e^{-x^2}$$
Montrer que,
$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$
où P_n est un polynôme de degré n admettant n racines réelles distinctes.

15. (Egd15) On se donne n nombres réels
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$
Pour chaque entier i entre 1 et n, on définit une fonction L_i dans $\mathbb{R}$ par :
$$L_i(x) = \prod_{j \in \{1,\cdots,n\} - \{i\}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
On admet que L_i' ne s'annule que $n - 2$ fois au plus.
   a. Montrer que :
$$(-1)^{n+i} L_i \xrightarrow{+\infty} +\infty \qquad (-1)^{i-1} L_i \xrightarrow{-\infty} +\infty$$
   b. Montrer que :
$$\forall j < i : (-1)^{i+j+1} L_i'(x_j) > 0$$
$$\forall j > i : (-1)^{i+j} L_i'(x_j) > 0$$
   Il est à remarquer que l'on ne peut rien dire du signe de $L_i'(x_i)$.

16. (Egd16) Soient $f_1, f_2, \cdots, f_p$ des fonctions dérivables dans un intervalle I et ne prenant pas la valeurs 0. Soit $f = f_1 f_2, \cdots f_p$ leur produit. Exprimer $\frac{f'}{f}$ sous la forme d'une somme.

17. (Egd17) Soit $f \in \mathcal{D}^n(]0, +\infty[)$. Soit g la fonction définie dans I par :
$$\forall x > 0 : g(x) = f(\frac{1}{x})$$
Vérifier que, pour tout entier n et tout $x > 0$:
$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!} x^{p-2n} f^{(n-p)}(\frac{1}{x})$$

18. (Egd18) Montrer que si tous les zéros d'une fonction polynomiale P sont réels et simples (c'est à dire n'annulant pas la dérivée), il en est de même pour sa dérivée P'.

19. (Egd19) Dans cet exercice, on admet que
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \left(1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to e^A$$
Soit $\lambda \in]0, 1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \lambda e^x = 0$$
admet une unique solution positive ou nulle notée α_n. Montrer que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et diverge vers $+\infty$. On pourra considérer les tableaux de variations des dérivées des fonctions
$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \lambda e^x$$

20. (Egd20)Une forme continue du théorème de Césaro[2]. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.
   a. Montrer que
$$f' \xrightarrow{+\infty} 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{+\infty} 0$$
   b. Montrer que
$$f' \xrightarrow{+\infty} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{+\infty} \lambda$$
   c. Montrer que
$$f' \xrightarrow{+\infty} +\infty \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$$
On peut considérer un $a > 0$ et écrire, pour $x \geq a$:
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(a)}{x} + \frac{f(a)}{x}$$

21. (Egd21) Soit f dérivable dans $[a, b]$ telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Le *théorème de Darboux* énonce qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   a. Montrer ce théorème sans utiliser le théorème de Rolle mais en adaptant sa démonstration.
   b. Redémontrer le résultat en utilisant directement le théorème de Rolle.
   c. Montrer que l'image d'un intervalle par une fonction dérivée est un intervalle (même si cette fonction dérivée n'*est pas continue*).

22. (Egd22) Soit f une fonction $\mathcal{C}^1([a, b])$ et deux fois dérivable dans $]a, b[$. En considérant la fonction auxiliaire
$$x \to f(a) - f(x) - (a - x)f'(x) - K(a - x)^2$$
avec $K \in \mathbb{R}$ bien choisi, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(a) = f(b) + (a - b)f'(b) + \frac{(a - b)^2}{2} f''(c)$$

[2] Voir l'exercice sc8 de la feuille d'exercices les suites de réels

23. (Egd23) Soit φ une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé. On définit une fonction τ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\tau(x) = \begin{cases} \varphi'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Montrer que τ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et préciser $\tau'(a)$. (Utiliser l'exercice 22)

24. (Egd24) Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la convergence de la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$$

et préciser sa limite. En déduire la limite de

$$\left(\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

25. (Egd25) Montrer que

$$\left(x \to x^n e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} = \left(x \to \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}\right).$$

26. (Egd26) Soit n entier non nul. Montrer que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

En déduire la partie entière de

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$$

27. (Egd27) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |\sin x|) \Rightarrow |a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n| \leq 1$$

28. (Egd28) Soit f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

a. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout réel x,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n + \frac{1}{2}}}$$

b. Montrer que

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P_n' - (2n+1)xP_n(x)$$

c. Montrer que

$$P_{n+1} + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1 + x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

puis $P_n'(x) = -n^2 P_{n-1}(x)$.

d. Calculer $P_n(0)$.

29. (Egd29) Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I contenant a, b, c avec $a < c < b$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = f(a) + \frac{c-a}{b-a}(f(b) - f(a)) + \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$$

Considérer la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} A$$

où A est choisi pour que

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$$

En déduire une majoration de l'erreur commise en approchant f par interpolation linéaire entre a et b lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

30. (Egd30) Autour des dérivées successives de arctan.

a. On note $\theta(x) = \arctan x$.
Exprimer, $\cos\theta(x)$, $\sin\theta(x)$, $\theta'(x)$ en fonction de x (sans θ) et $\theta'(x)$ en fonction de $\cos\theta(x)$. Former des expressions trigonométriques des $\theta^{(k)}$ pour les premières valeurs de k. En déduire, pour $n \geq 1$,

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)$$

b. Montrer que $\arctan^{(n)}(x)$ est de la forme

$$\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où P_n est une fonction polynomiale de degré $n-1$.
Montrer, sans utiliser la première question, que P_n admet $n-1$ racines réelles.

c. Exprimer les racines de P_n en utilisant a..

31. (Egd31) On veut montrer qu'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ dérivable à droite sur $[a, b[$ avec une dérivée à droite nulle est constante.
Pour tout $\lambda > 0$, on définit la partie E_λ de $[a, b]$ formée par les x tels que

$$\forall t \in [a, x], \ f(t) \leq f(a) + \lambda(t - a)$$

Montrer que E_λ contient un élément strictement plus grand que a. On note $\beta = \sup E_\lambda$. Montrer que $\beta \in E_\lambda$. Montrer que $\beta = b$ puis conclure.

32. (Egd32) Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^+$, continue en 0 et telle que, en 0^{++},

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} \to l \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = l$.

33. (Egd33) Pour quels $x \in \mathbb{R}$, l'expression

$$\frac{e^{x - \frac{1}{x}} - 1}{x - \frac{1}{x}}$$

est-elle définie ? Définir une fonction avec cette expression, la prolonger par continuité là où c'est possible.

34. (Egd34) Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, telle que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tous les $k \in [\![1,n]\!]$. Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} M_n$$

$$\text{avec } M_n = \max_{[a,b]} \left| f^{(n)} \right|.$$

35. (Egd35) Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^2(I)$. On suppose que f' est croissante[3] Montrer que le graphe de f est au dessus de ses tangentes. Montrer la réciproque. Raisonner par l'absurde et former un tableau de variations.

[3] on dit que la fonction est *convexe*.

1. (Cgd01) Appliquer le théorème de Rolle à
$$x \mapsto (g(x)-g(a)(f(b)-f(a))-(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))$$
2. (gd02) Montrons d'abord par l'absurde que l'hypothèse sur la limite en $+\infty$ égale à $f(a)$ entraîne que la fonction n'est pas injective.
Comme elle est continue, elle serait alors strictement monotone. Dans le cas croissant sa limite en $+\infty$ serait toujours strictement plus grande que $f(a)$ ou même $+\infty$ en contradiction avec l'hypothèse. De même dans le cas décroissant.
Comme f n'est pas injective, il existe $u < v$ tels que $f(u) = f(v)$. On peut appliquer le théorème de Rolle à f dans $[u, v]$
3. (Cgd03) Former les tableaux de variations de fonctions bien choisies, éventuellement en dérivant plusieurs fois pour se fonder sur une inégalité évidente.
4. pas de correction pour Egd04.tex
5. pas de correction pour Egd05.tex
6. pas de correction pour Egd06.tex
7. pas de correction pour Egd07.tex
8. (Cgd08) Fonctions de Gronwall.
   a. Si f est $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas la fonction $\frac{f'}{f}$ est continue sur le segment I. Elle est donc bornée (et atteint ses bornes) ce qui entraine qu'elle est $M_1-\mathcal{G}$ avec $M_1 = \max_I |f'|$.
   b. Avec les formules sur la dérivabilité des résultats d'opérations, on montre
      - λf est $\alpha - \mathcal{G}$,
      - fg est $(\alpha+\beta) - \mathcal{G}$,
      - $f \circ \psi$ et $(M_1\alpha) - \mathcal{G}$ avec $M_1 = \max_I |\psi'|$.
   c. Comme f est $\alpha - \mathcal{G}$ et à valeurs positives,
   $$|f'(x)| \leq \alpha|f(x)| \Rightarrow f'(x) \leq \alpha f(x)$$
   On en déduit en dérivant que $\varphi = (x \mapsto f(x)e^{\alpha x})$ est décroissante. La fonction φ est à valeurs positives, décroissante dans $I = [-1, 1]$. Si elle est nulle en 0, elle est nulle dans $[0, 1]$.
   D'après b., la fonction $f \circ \psi$ vérifie les mêmes hypothèses que f. Elle est nulle dans $[0, 1]$ ce qui entraine que f est nulle dans $[-1, 0]$.
   d. Les hypothèses sont semblables aux précédentes sauf que l'on ne suppose plus que f est à valeurs positives. On s'y ramène avec la question b et $f^2 = ff$. La nullité de f^2 entraine celle de f.
   e. Les hypothèses sont semblables aux précédentes sauf que f s'annule en un $a \in [-1, +1]$ dont on ne sait rien. On se propose de le ramener en 0 à l'aide d'une fonction ψ_λ.
   Si $-1 < a < 1$:
   $$\begin{aligned} \psi_\lambda(0) = a &\Leftrightarrow -1 + 2^{1-\lambda} = a \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)\ln(2) = \ln(a+1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 - \frac{\ln(a+1)}{\ln(2)} \end{aligned}$$
   Si $a = -1$ ou 1, on peut raisonner comme en c.
9. pas de correction pour Egd09.tex
10. pas de correction pour Egd10.tex
11. pas de correction pour Egd11.tex
12. (Cgd12)

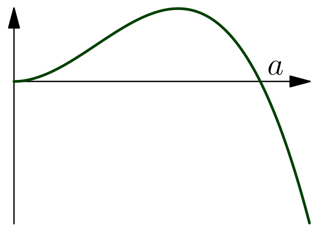

FIG. 1 – Exercice 12

Soit $m > 0$ et M le point de coordonnées $(m, f(m))$. L'équations de la tangente au graphe en ce point est
$$y - f(m) = f'(m)(x - m)$$
Elle passe par l'origine du repère si et seulement si
$$f(m) = f'(m)m$$
Il s'agit de montrer que, sous les hypothèses données, il existe un $m > 0$ tel que $f(m) = f'(m)m$.
Considérons la fonction φ définie par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Par hypothèse, elle est continue en 0 et dérivable dans $]0, +\infty[$. De plus $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle entre 0 et a. Il existe un $m > 0$ tel que
$$\varphi'(m) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(m)}{m} - \frac{f(m)}{m^2} = 0 \Leftrightarrow mf'(m) = f(m)$$
13. (Cgd13)
    a. Pour un x réel quelconque, on définit une suite par
    $$x_0 = x \text{ et } x_{n+1} = \varphi(x_n)$$
    Alors
    $$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = a^n(x-u) + u \text{ et } f(x_n) = f(x)$$
    Si $|a| < 1$ la suite converge vers u et $f(x) = f(u)$ car f est continue en u.
    Si $|a| > 1$, on remarque que l'invariance de f est aussi valable pour la bijection réciproque ce qui permet de se ramener au premier cas.
    b. Invariance de la dérivée ou du taux.
    c. On se ramène au b. en considérant $f \circ f \circ f$. Le coefficient a doit être strictement positif pour qu'il existe des solutions.
14. pas de correction pour Egd14.tex
15. pas de correction pour Egd15.tex
16. pas de correction pour Egd16.tex

17. pas de correction pour Egd17.tex
18. pas de correction pour Egd18.tex
19. (Cgd19) Notons

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \lambda e^x$$

et remarquons que $f_n^{(k)} = f_{n-k}$ On peut dériver n fois pour simplifier la partie polynomiale

$$f_{n,\lambda}^{(n)} = 1 - \lambda e^x$$

On en déduit le tableau de variations

	0		$+\infty$
$f_n^{(n)}$	$1-\lambda > 0$	$\searrow$	$-\infty$
$f_n^{(n-1)}$	$1-\lambda > 0$	$\nearrow$ >0 $\searrow$	$-\infty$

La situation se reproduit lorsque l'ordre des dérivations diminue. À droite de 0, la fonction commence par croître en restant positive avant de décroître (à partir d'un α_k) vers $-\infty$. Elle admet donc un unique zéro noté α_n et cet enchainement de tableaux de variations montre que la suite est bien croissante. D'autre part d'après le résultat admis, pour tout $A \in \mathbb{R}$,

$$(\Lambda_n(A))_{n\in\mathbb{N}} \to 1$$

Comme $\lambda < 1$, il existe N_A tel que

$$n \geq N_A \Rightarrow \Lambda_n(A) > \lambda \Rightarrow f_{n,\lambda}(A) > 0$$
$$\Rightarrow A < \alpha_n$$

Cela prouve la divergence vers $+\infty$.

20. pas de correction pour Egd20.tex
21. (correction gd21)
    a. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes. Considérons en particulier la borne inférieure m et le minimum global x_m en lequelle elle est atteinte : $f(x_m) = m$. Une erreur classique serait de penser que la fonction est localement décroissante au voisinage de a ou localement croissante au voisinage de b. Avec nos hypothèses, rien ne permet de l'affirmer. Le raisonnement qui suit utilise uniquement la définition de la convergence
    De $f'(a) < 0$, on tire qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]a, a+\alpha[, \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0$$

    Il existe donc des $x \in [a, b]$ tels que $f(x) < f(a)$ ce qui entraine que a ne peut pas être un minimum global.
    On montre de même que $x_m \neq b$. Ainsi le minimum global est à l'intérieur du segment. Comme la fonction est dérivable en ce point sa dérivée est nulle.

22. (Cgd22) Notons φ la fonction auxiliaire proposée par l'énoncé. Comme $\varphi(a) = 0$, on choisit K pour que $\varphi(b) = 0$ ce qui permet d'utiliser le théorème de Rolle (φ est $\mathcal{C}^1$) entre a et b. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ avec

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -(a-x)f''(x) + 2K(a-x)\\ &= (a-x)\left(-f''(x) + 2K\right)\end{aligned}$$

On en déduit $K = \frac{f''(c)}{2}$.

23. (Cgd23) On montre que τ est $\mathcal{C}^1$ en a en utilisant le théorème de la limite de la dérivée.
Pour tout $x \neq a$,

$$\tau'(x) = \frac{\varphi'(x)(x-a) - \varphi(x) + \varphi(a)}{(x-a)^2}$$

En utilisant l'exercice 22 avec φ pour f et x pour b, il existe c_x entre a et x tel que

$$\tau'(x) = \frac{\frac{(a-x)^2}{2}f''(c_x)}{(x-a)^2} = \frac{f''(c_x)}{2}$$

Comme f'' est continue en a, $\tau' \xrightarrow{a} \frac{f''(a)}{2}$ ce qui assure que τ est dérivable en a avec

$$\tau'(a) = \frac{f''(a)}{2}.$$

24. (Cgd24) Pour chaque k entre 1 et n, écrivons le théorème des accroissements finis entre 0 et $\frac{k}{n^2}$. Il existe $\theta_k \in]0, \frac{k}{n^2}[$ tel que $f(\frac{k}{n^2}) = \frac{k}{n^2} f'(\theta_k \frac{k}{n^2})$. On en déduit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \left(f'(\theta_k \frac{k}{n^2}) - f'(0) \right)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) = \frac{n(n+1)}{2n^2} f'(0)$$

qui converge vers $\frac{1}{2}f'(0)$ et

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \left(f'(\theta_k \frac{k}{n^2}) - f'(0) \right) \right| \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \sup \left\{ |f'(x) - f'(0)|, x \in [0, \frac{1}{n}] \right\}$$

La continuité de f' en 0 entraine que cette suite converge vers 0. La limite de la suite des u_n est donc

$$\frac{1}{2} f'(0).$$

En prenant le ln du produit, on est ramené à la somme précédente avec la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ dont la dérivée en 0 est égale à 1. On en déduit que la limite de ce produit est $\sqrt{e}$.

25. (Cgd25) Raisonner par récurrence. Une formule de Leibniz avec deux termes seulement est utilisée.

26. (Cgd26) On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction racine carrée dans les intervalles $[n-1,n]$ et $[n,n+1]$. On somme les encadrements de 1 à n. Des simplifications en dominos conduisent à un encadrement montrant que la partie entière cherchée est 99.

27. (Cgd27) On remarque que
$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = f'(0)$$
On raisonne ensuite par l'absurde en formant des tableaux de variations.
Si $f'(0) > 1$, il existe un $\alpha > 0$ tel que f' reste à valeurs strictement plus grandes que 1 dans $[-\alpha,\alpha]$. On en déduit que $f(x) > \sin x$ pour $0 < x < \alpha$. On obtient une autre contradiction dans l'intervalle à gauche de 0 pour $f'(0) < -1$.

28. pas de correction pour Egd28.tex

29. (Cgd29) Pour toute valeur de A, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Il existe une seule valeur de A pour laquelle $\varphi(c) = 0$:
$$A = \frac{2}{(c-a)(c-b)}\left(f(c) - f(a) - \frac{c-a}{b-a}(f(b)-f(a))\right)$$
On applique le théorème de Rolle à φ entre a et c puis entre c et b. Il existe d et e tels que
$$a < d < c < e < b \qquad \varphi'(d) = \varphi'(e) = 0$$
On applique le théorème de Rolle à φ' entre d et e, il existe δ tel que $\varphi''(\delta) = 0$. Or
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{x-a+x-b}{2}A\\ \varphi''(x) &= f''(x) - A\end{aligned}$$
On en tire $A = f''(\delta)$ puis la formule demandée.
La différence entre f et son interpolation linéaire est
$$E(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$
Notons M_2 un majorant de $|f''|$. On déduit de la première question que, pour tout $c \in]a,b[$,
$$|E(c)| \leq \frac{(c-a)(b-c)}{2}M_2$$
On étudie la fonction de c pour trouver le plus petit majorant.

30. (Cgd30)

a. On sait que $\cos\theta(x) > 0$ car $-\frac{\pi}{2} < \theta(x) < \frac{\pi}{2}$ donc
$$\begin{aligned}\cos\theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\ \sin\theta(x) &= \cos\theta(x)\tan\theta(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\\ \theta'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \cos^2\theta(x).\end{aligned}$$
Pour alléger, on note θ au lieu de $\theta(x)$. On en déduit
$$\begin{aligned}&\theta' = \cos^2\theta\\ &\Rightarrow \theta^{(2)} = -2\theta'\cos\theta\sin\theta = -\cos^2\theta\sin 2\theta\\ &\Rightarrow \theta^{(3)} = -2\theta'\cos\theta\,(-\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta)\\ &\qquad = -2\cos^3\theta\cos 3\theta\\ &\theta^{(4)} = 6\theta'\cos^2\theta\,(\sin\theta\cos 3\theta + \cos\theta\sin 3\theta)\\ &\qquad = 6\cos^3\theta\sin 4\theta\end{aligned}$$
Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$:
$$\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi, \qquad \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos\varphi.$$
On peut alors réécrire les relations précédentes :
$$\begin{aligned}\theta' &= \cos\theta\sin(\theta + \frac{\pi}{2})\\ \theta^{(2)} &= \cos^2\theta\sin\left(2(\theta+\frac{\pi}{2})\right)\\ \theta^{(3)} &= 2\cos^3\theta\sin\left(3(\theta+\frac{\pi}{2})\right)\\ \theta^{(4)} &= 3!\cos^4\theta\sin\left(4(\theta+\frac{\pi}{2})\right).\end{aligned}$$
On vérifie alors par récurrence la relation
$$\theta^{(n)} = (n-1)!\cos^n\theta\sin\left(4(\theta+\frac{\pi}{2})\right).$$
La relation demandée par l'énoncé en est une reformulation.

b. Comme $1+x^2 > 0$, il existe une fonction P_n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$
Les fonctions P_n vérifient une relation de récurrence.
$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = 1,\\ &\qquad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2nxP_n(x).\end{aligned}$$
On en déduit que P_n est polynomiale de degré $n-1$. Comme P_1 est de degré 1, il admet une racine réelle. Supposons que P_n admette $n-1$ racines réelles. Par le théorème de Rolle, $\arctan^{(n+1)}$ (donc P^{n+1}) s'annule entre chacune donc admet $n-2$ racines. Soit a la plus petite et b la plus grande. Le fait que $\arctan^{(n+1)}$ converge 0 en $+\infty$ et $-\infty$ permet d'obtenir deux autres racines (à rédiger).

c. En utilisant la question a. On obtient que les racines de P_n sont les
$$-\cot\frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in [\![1, n-1]\!].$$

31. (Cgd31) La définition de la dérivabilité à droite en a avec λ dans le rôle de ε assure l'existence d'un $\alpha_\lambda(a)$. On vérifie facilement que $a + \alpha_\lambda(a) \in E_\lambda$.
Pour montrer que $\beta \in E_\lambda$, on doit prouver la majoration affine pour tous les $t \in [a,\beta]$.

Si $t < \beta$, il n'est pas un majorant de E_λ. Il existe donc un x dans E_λ strictement plus grand que t. Par définition de E_λ, la majoration affine est alors vérifiée. Pour avoir la majoration affine en β, il suffit de passer à la limite strictement à gauche de β dans l'inégalité. On en conclut donc que $\beta \in E_\lambda$[4].
Supposons $\beta < b$. On peut utiliser la dérivabilité en β. Il existe un $\alpha_\lambda(\beta)$ tel que

$$\forall t \in [\beta, \beta+\alpha_\lambda(\beta)], \quad \left.\begin{aligned} f(t) \leq f(\beta) + \lambda(t-\beta) \\ f(\beta) \leq f(a) + \lambda(\beta - a) \end{aligned}\right\} \\ \Rightarrow f(t) \leq f(a) + \lambda(t - f(a)$$

en additionnant. Cela prouve que $\beta + \alpha_\lambda(\beta) \in E_\lambda$ ce qui est contraire à la définition de β comme borne supérieure. On doit donc avoir $\beta = b$.
On peut donc écrire que pour tout $t \in [a,b]$ et tous $\lambda > 0$,

$$f(t) \leq f(a) + \lambda(t-a)$$

Pour t fixé et λ quelconque, on en déduit $f(t) \leq f(a)$. On obtient l'autre inégalité en appliquant ce résultat à $-f$ qui vérifie les mêmes propriétés.

32. pas de correction pour Egd32.tex
33. (Cgd33) La fonction f est définie dans $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}, \; f(x) = \frac{e^{x-\frac{1}{x}} - 1}{x - \frac{1}{x}}.$$

En 0, on ne peut la prolonger par continuité car

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}\left(e^x e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) \to \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En revanche, en $a \in \{-1,+1\}$ on peut la prolonger par continuité en posant $f(a) = 1$ car 1 est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et

$$x - \frac{1}{x} \to 0.$$

Reprendre cet exercice dans le cadre de la feuille sur les développements pour étudier la dérivabilité en $-$ ou $+1$.

34. pas de correction pour Egd34.tex
35. pas de correction pour Egd35.tex

[4]on dit que E_λ est fermé.