1. (Egs01) On considère la permutation
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
Déterminer ses orbites et la décomposer en cycles disjoints puis en transpositions. Quelle est sa signature ?

2. (Egs02) Soit $n \geq 3$.
   a. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent le sous-groupe des permutations paires $\mathcal{A}_n$.
   b. Soit a, b, c des éléments deux à deux distincts dans $\{3, \cdots, n\}$. Calculer
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \end{pmatrix}$$
   Calculer
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \end{pmatrix}$$
   c. Montrer que les cycles $\begin{pmatrix} 1 & 2 & i \end{pmatrix}$, pour i entier dans $\{3, \cdots, n\}$, engendrent $\mathcal{A}_n$.

3. (Egs03) Quel est le nombre de cycles de longueur 3 parmi les permutations de n éléments ? Quel est le nombre de cycles de longueur p ?

4. (Egs04) Exprimer l'ordre d'une permutation en fonction des longueurs des cycles disjoints qui la composent. Exemple, calculer σ^{2099} pour
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

5. (Egs05) Conjugaison.
On dit que deux permutations θ et θ' dans $\mathfrak{S}_n$ sont *conjuguées* si et seulement si il existe une permutation σ telle que $\theta' = \sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1}$.
   a. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un cycle. Montrer que $\sigma \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}$ est un cycle à préciser.
   b. À toute permutation, on peut associer de manière unique la suite rangée par ordre croissant des longueurs des cycles disjoints de sa décomposition. Montrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont la même suite de longueurs.
   c. Montrer qu'une permutation et sa réciproque sont conjuguées.
   Cas particulier. Préciser σ tel que $\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1} = \theta^{-1}$ avec
   $$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6. (Egs06) *Matrice attachée à une permutation.*
Soit p un naturel supérieur ou égal à 2 et $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. On définit $P_\sigma \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 : \text{ terme } i,j \text{ de } P_\sigma = \delta_{i\sigma(j)}$$
où $\delta_{u,v}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $u = v$ et 0 sinon.
Soit θ et $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Exprimer $P_\sigma P_\theta$ et ${}^tP_\sigma$ comme des matrices de permutations. Montrer que $P_\sigma P_\theta \, {}^tP_\sigma$ et P_θ sont semblables. Montrer que ${}^tP_\theta$ et P_θ sont semblables.

7. (Egs07) On convient que l'identité est la composée de m transpositions avec $m = 0$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ avec p points fixes. Montrer que σ est la composée de m transpositions avec $m \leq n - p - 1$.

8. (Egs08) Soit M une matrice carrée inversible. En formant une variante de la méthode du pivot partiel, montrer qu'il existe des matrices L, U et une permutation σ telles que
$$M = L\,U\,P_\sigma \text{ avec } \begin{cases} L \text{ trng. inf. avec diag. de } 1 \\ U \text{ trng. sup.} \\ P_\sigma \text{ mat. de perm. (ex gs06)} \end{cases}$$
Former ces matrices pour
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. (Egs09) Soit σ et θ dans $\mathfrak{S}_p$. Quel est l'effet de la multiplication à gauche ou à droite d'une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ par P_σ ? Préciser le terme i, j de
$${}^tP_\theta \, M \, P_\sigma.$$

10. (Egs10) Soit G un groupe fini de cardinal n et $g \in G$ d'ordre p c'est à dire que
$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } g^k = e\right\}.$$
Montrer que p divise n. On définit σ_p par
$$\forall (h) \in G, \; \sigma_g(h) = gh.$$
Montrer que σ_g est une permutation de G. Quelle est sa signature ? Montrer que
$$n \text{ impair } \Rightarrow \sigma_g \text{ paire.}$$

11. (Egs11) Matrices irréductibles.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite *réductible* si et seulement si il existe une matrice de permutation P_σ telle que ${}^tP_\sigma M P_\sigma$ sont triangulaire supérieure par blocs c'est à dire de la forme
$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix} \text{ avec } U \text{ carrée.}$$
Une matrice qui n'est pas réductible est dite *irréductible.*
   a. Soit (I, J) une partition de $[\![1,p]\!]$ telle que
   $$\forall (i,j) \in I \times J, \; a_{ij} = 0.$$
   Montrer que A est réductible.
   b. Montrer la réciproque de l'implication du a. Caractériser les matrices irréductibles.
   c. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, il existe une suite
   $$a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \cdots, a_{k_{m-1}k_m}, a_{k_mj}$$
   non nuls. Montrer que la matrice est irréductible.[1]

[1] je ne sais pas si la réciproque est vraie

12. (Egs12) Toutes les matrices sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit L, L' triangulaires inférieures inversibles, U, U' triangulaires supérieures inversibles. Soit σ et θ des permutations.

    a. Montrer que
    $$LP_\sigma U = L'P_\theta U' \Rightarrow \sigma = \theta.$$

    b. Soit M inversible. Montrer qu'il existe L triangulaire inférieure inversible, U triangulaire supérieure inversible et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tels que
    $$M = LP_\sigma U.$$
    Cette décomposition est-elle unique ?

13. (Egs13) Soit σ et θ dans $\mathfrak{S}_\mathbf{n}$ telles que
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma(i) \leq \theta(i).$$
Montrer que $\sigma = \theta$.

1. pas de correction pour Egs01.tex
2. a. Toute permutation paire se décompose en un nombre pair de transpositions. Elle se décompose donc en produits de deux transpositions. Montrons que toute composée de deux transpositions se décompose en cycles de longueur 3. Deux cas sont possibles.
   – Premier cas : transposition contigues
   $$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}$$
   – Deuxième cas : transpositions disjointes
   $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}b & c\end{pmatrix} \\ \circ \begin{pmatrix}b & c\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}b & c & d\end{pmatrix}\end{aligned}$$
   b. On trouve respectivement
   $$\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1 & b & c\end{pmatrix}$$
   c. On examine tous les 3-cycles en discutant suivant l'intersection du support avec $\{1, 2\}$. On peut toujours les décomposer en utilisant la question précédente.
3. pas de correction pour Egs03.tex
4. pas de correction pour Egs04.tex
5. pas de correction pour Egs05.tex
6. pas de correction pour Egs06.tex
7. (Cgs07) On raisonne par récurrence descendante. Considérons la proposition $\mathcal{P}_k$: toute permutation avec au moins k points fixes est la composée de m permutations avec $m \leq n - k$.
   La convention précisée au début de l'énoncé signifie que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. Montrons que $\mathcal{P}_k$ entraîne $\mathcal{P}_{k-1}$.
   Soit σ avec au moins $k - 1$ points fixes.
   Si σ a plus de k points fixes, l'hypothèse de récurrence montre que σ est la composée de m transpositions avec $m \leq n - k \leq n - k + 1 = n - (k - 1)$.
   Si σ admet exactement $k - 1$ points fixes. Soit x entre 1 et n qui n'est pas un point fixe de σ. On note $y = \sigma(x)$, alors $x \neq y$ et on considère $\sigma' = (x\ y) \circ \sigma$.
   Remarquons que y n'est pas un point fixe. S'il l'était, on aurait $y = \sigma(y)$ et donc $x = y$ à cause de l'injectivité de σ. On en déduit que tous les points fixes de σ sont aussi des points fixes de σ'. De plus
   $$\sigma'(x) = (x\ y)(\sigma(x)) = (x\ y)(y) = x$$
   Donc σ' admet au moins k points fixes. Il existe des transpositions $\tau_1, \cdots, \tau'_m$ avec $m' \leq n - k$ et
   $$\sigma' = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau'_m \Rightarrow \sigma = (x\ y) \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau'_m$$
   avec $m' + 1 \leq n - k + 1 = n - (k - 1)$.
8. (Cgs08) On procède comme pour l'algorithme du pivot partiel sauf que l'on cherche un pivot dans le reste de la *ligne* au lieu de faire dans la colonne comme habituellement.
9. (Cgs09) Dans la colonne j de P_σ, le seul 1 est en ligne $\sigma(j)$. On en déduit
   $$\begin{aligned}&C_j(M\,P_\sigma) = C_{\sigma(j)}(A), \\ &M\,P_\sigma = \begin{pmatrix}C_{\sigma(1)}(A) & \cdots & C_{\sigma(p)}(A)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
   Pour la multiplication à gauche, utilisons la transposition
   $$P_{\theta^{-1}}M = {}^t({}^tMP_\theta) \Rightarrow P_{\theta^{-1}}M = \begin{pmatrix}L_{\theta(1)}(M) \\ \vdots \\ L_{\theta(p)}(M)\end{pmatrix}.$$
   Le terme i, j de $P_{\theta^{-1}}MP_\sigma$ est $a_{\theta(i)\sigma(j)}$.
10. (Cgs10) L'application σ_g est une permutation car elle est bijective de bijection réciproque $\sigma_{g^{-1}}$. L'orbite d'un élément $h \in G$ selon σ_g est
    $$\left\{h, gh, \cdots, g^{k-1}h\right\}.$$
    Chaque orbite contient p éléments et elles constituent une partition de G donc $n = \text{Nb orbites} \times p$. La permutation σ_g se décompose donc en $\frac{n}{p}$ cycles disjoints de longueur p :
    $$\varepsilon(\sigma_g = \left((-1)^{p-1}\right)^{\frac{n}{p}} = (-1)^{\frac{n(p-1)}{p}}.$$
    En particulier, σ_g est paire si et seulement si
    $$\frac{n(p-1)}{p} \equiv 0 \mod 2 \Leftrightarrow n \equiv \frac{n}{p} \mod 2.$$
    C'est toujours réalisé si n est impair car alors $\frac{n}{p}$ est aussi impair.
11. pas de correction pour Egs11.tex
12. pas de correction pour Egs12.tex
13. pas de correction pour Egs13.tex