1. (Eis01) Soit $f$ continue non identiquement nulle sur $[a,b]$ et telle que
$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} xf(x)dx = \int_{[a,b]} x^2 f(x)dx = 0$$
Montrer que $f$ admet au moins trois zéros dans $]a,b[$. Généraliser.

2. (Eis02) Soit $f$ continue sur $[0,1]$ et telle que
$$\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$$
Montrer que $f$ admet un point fixe.

3. (Eis03) Soit $f$ continue et à valeurs strictement positives sur $[a,b]$. On note aussi
$$M = \max_{[a,b]} f, \qquad m = \min_{[a,b]} f$$
Pour tout entier $n \neq 0$, on pose
$$u_n = \left(\int_{[a,b]} f^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad v_n = \left(\int_{[a,b]} f^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to M$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to m$.

4. (Eis04) Soit $f$ continue sur $[0,\pi]$ et telle que
$$\int_{[0,\pi]} f\sin = \int_{[0,\pi]} f\cos = 0$$
Montrer que $f$ admet au moins deux zéros sur $]0,\pi[$.

5. (Eis05) Soit $f$ continue sur $[a,b]$ telle que
$$\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$$
Montrer que $f$ est constante sur $[a,b]$ et préciser sa valeur.

6. (Eis06) Soit $f$ continue sur $[a,b]$. Montrer que
$$\left|\int_a^b f\right| < \int_a^b |f|$$
si $f$ n'est pas de signe constant.

7. (Eis07) Déterminer une suite équivalente à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}$$

8. (Eis08) Soit $0 < a < b$, montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

9. (Eis09) On adopte les notations du texte Intégration sur un segment.
Soit $f$ une fonction bornée à valeurs réelles définie sur un segment $[a,b]$. On note $\mathcal{E}^-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier inférieures à $f$ et $\mathcal{E}^+(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier supérieures à $f$. On note $I_+(f)$ la borne inférieure de l'ensemble des $\int_{[a,b]}\varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{E}^+(f)$ et $I_-(f)$ la borne supérieure de l'ensemble des $\int_{[a,b]}\varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$.
Le *pas* d'une subdivision $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ est le plus grand des $x_{i+1} - x_i$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$. Il est noté $\delta(\mathcal{S})$.
On suppose $f$ *croissante* sur $[a,b]$.
Soit $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On définit des fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$ :
$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad \varphi(x_i) = \psi(x_i) = f(x_i)$$
$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \quad \begin{cases} \text{v. de } \varphi \text{ sur } ]x_i, x_{i+1}[ = f(x_i) \\ \text{v. de } \psi \text{ sur } ]x_i, x_{i+1}[ = f(x_{i+1}) \end{cases}$$
   a. Montrer que $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. Montrer que
$$0 \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \delta(\mathcal{S})(f(b) - f(a))$$
   b. Montrer que $I_-(f) = I_+(f)$.

10. (Eis10) Pour $x \neq \pm 1$ réel, justifier la définition de $I(x)$ par
$$I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$$
   a. On pose $t_k = k\frac{2\pi}{2n} = k\frac{\pi}{n}$ pour $k$ entre 0 et $n$. En remarquant que $e^{it_k}$ et $e^{-it_k}$ sont des racines $2n$-ièmes de l'unité donner une expression simple de
$$\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{it_k})(x - e^{-it_k})$$
   b. Calculer $I(x)$ à l'aide de somme de Riemann.

11. (Eis11) Lemme de Riemann-Lebesgue.
On admet que, pour tout réel $T$ : $\int_T^{T+2\pi} \cos = 0$.
   a. Montrer que, pour tous réels $a < b$ :
$$\left(\frac{1}{n}\int_{na}^{nb} \cos\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$$
   b. Montrer que, pour tous réels $a < b$ et toute fonction $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ :
$$\left(\frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(\frac{u}{n})\cos u\, du\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$$

12. (Eis12) On admet que, pour tout réel $T$ : $\int_T^{T+2\pi} |\sin| = 4$.
   a. Montrer que, pour tous réels $a < b$ :
$$\left(\frac{1}{n}\int_{na}^{nb} |\sin|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{2}{\pi}(b-a)$$
   b. Montrer que, pour tous réels $a < b$ et toute fonction $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ :
$$\left(\frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f(\frac{u}{n})|\sin u|du\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{2}{\pi}\int_b^b f$$

13. (Eis13) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 avec
$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$$

14. (Eis14) Soient $f$ et $g$ continues sur $[0,1]$, à valeurs positives et telles que $f(x)g(x) \geq 1$ pour tous les $x$ de $[0,1]$. Montrer que
$$\int_{[0,1]} f \int_{[0,1]} g \geq 1.$$

15. (Eis15) Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs strictement positives. Pour $f \in E$, on pose
$$p(f) = \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt\right)$$
Montrer que $p(f) \geq 1$ pour toute $f \in E$. Montrer que
$$\min\{p(f), f \in E\} = 1$$
Quel est l'ensemble des $f \in E$ tels que $p(f) = 1$ ?

16. (Eis16) En utilisant
$$\frac{1}{1+\frac{x}{n}} = 1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2(1+\frac{x}{n})}$$
déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$I_n = \int_0^\pi \frac{n\sin x}{n+x}\,dx.$$

17. (Eis17) Soit $f$ continue sur $[0,1]$. Montrer que
$$(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_0^1 f(x^n)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}} \to f(0).$$

18. (Eis18) La fonction définie sur $[0,4]$ par
$$x \mapsto \sin(\frac{\pi}{4}\lfloor x \rfloor)$$
est-elle intégrable ? Si oui, calculer son intégrale.

19. (Eis19) Pour tout naturel $n$, on considère une fonction $k_n$ continue dans $[0,1]$, décroissante, à valeurs positives et telle que :
$$\left(\int_{[0,1]} k_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 1; \qquad \forall a \in ]0,1],\ (k_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$
Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $K_n(f) = \int_{[0,1]} f k_n$.
    a. Montrer que $k_n$ défini dans $[0,1]$ par $k_n(x) = ne^{-nx}$ satisfait aux conditions.
    b. Montrer que $f(0) = 0$ entraine $(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
    c. Que dire de $(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général ?

20. (Eis20) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $k_n$ continue dans $[0,1]$, croissante, à valeurs positives telle que :
$$\left(\int_{[0,1]} k_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$
et que, pour tout $a \in [0,1[$, la suite $(k_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ soit négligeable devant
$$\left(\int_{[0,1]} k_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $K_n(f) = \int_{[0,1]} f k_n$.
    a. Montrer que $k_n$ défini dans $[0,1]$ par $k_n(x) = x^n$ satisfait aux conditions.
    b. Montrer que $(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
    c. Montrer que si $f(1) = 0$ alors $(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(\int_{[0,1]} k_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
    d. Que dire de $(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas général où $f(1) \neq 0$ ?

21. (Eis21) Soient $a$ et $b$ entiers tels que $a < b$. Soit $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et croissante. Montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que
$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + (f(b) - f(a))\theta$$
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in [0,1]$ tel que
$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$$

22. (Eis22) Soit $f$ uniformément continue dans $I = [0,+\infty[$. Montrer qu'il existe $a \geq 0$ et $b > 0$ tels que
$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq a + bx$$
Le raisonnement peut-il s'appliquer si $I = [0,m[$ ?

23. (Eis23) Soit $a$ et $b$ deux réels, soit $f$ une fonction uniformément continue dans $]a,b[$, montrer que $f$ est bornée et qu'elle converge aux extrémités.

24. (Eis24) Soit $f$ une fonction continue non constante dans $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que $f$ est uniformément continue et qu'elle admet une plus petite période non nulle en valeur absolue.

25. (Eis25) Montrer que la fonction racine carrée est uniformément continue dans $\mathbb{R}^+$ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne. On peut montrer que si $0 \leq x \leq x'$ :
$$\sqrt{x'} - \sqrt{x} \leq \sqrt{x'-x}$$

26. (Eis26) Soit $f$ une fonction continue dans $\mathbb{R}^+$ et admettant une limite finie en $+\infty$, montrer que $f$ est uniformément continue.

27. (Eis27) Propriétés des fonctions uniformément continues. Montrer que le produit de deux fonctions uniformément continues bornées est uniformément continue. Montrer que ce n'est plus vrai sans l'hypothèse bornée.

28. (Eis28)
    a. Comparer $\sin x$, $x$ et $x - x^2$ pour $x \geq 0$.
    b. Déterminer les limites des suites
$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
    En déduire celle de
$$\left(\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k+n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

29. (Eis29) Soit $f$ une fonction lipschitzienne sur un segment et ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est lipschitzienne.

30. (Eis30) Soit $f$ et $g$ deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f$ et $g$ sont bornées alors $fg$ est lipschitzienne. Montrer qu'il n'en est plus nécessairement de même si on ne suppose plus les fonctions bornées.

31. (Eis31) Soit $f$ une fonction $k$-lipschitzienne sur un intervalle $I$. (les questions b. et c. sont indépendantes)
    a. Montrer que $x \to f(x) - kx$ et $x \to f(x) + kx$ sont monotones.
    b. On suppose $I = ]a, b[$. Montrer que $f$ admet un prolongement $k$-lipschitzien à $[a, b]$.
    c. On suppose $I = ]a, b[$. Pour tout réel $y$, on définit $\varphi_y$ dans $I$ par :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi_y(x) = f(x) + k|x - y|$$

    Suivant la position de $y$ par rapport à $a$ et $b$, former les différents tableaux de variations de $\varphi_y$. En déduire que $\varphi_y$ est minorée et atteint sa borne inférieure. On note $g(y) = \min \varphi_y$.
    Montrer que $y \in I$ entraine $g(y) = f(y)$. Montrer que $g$ est $k$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

32. (Eis32) Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées définies dans un intervalle $I$. On définit une fonction $\varphi$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \sup_{t \in I} \{f(t) + xg(t)\}$$

Montrer que $\varphi$ est lipschitzienne.

33. (Eis33) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2\, dx\right) \leq \left(\int_0^1 x^3\, dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3\, dx\right)$$

en utilisant des inégalités de Cauchy-Schwarz.

34. (Eis34) Soit $f$ continue dans $[0, 1]$ et d'intégrale nulle. Montrer que

$$\int_{[0,1]} f^2 \leq -\left(\min_{[0,1]} f\right)\left(\max_{[0,1]} f\right).$$

35. (Eis35) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_n \in \mathcal{E}([0, 1])$ par

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ \varphi_n(x) = \begin{cases} n^2 \text{ si } x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[ \\ 0 \text{ si } x \in [0, 1] \setminus \left]0, \dfrac{1}{n}\right[ \end{cases}$$

Pour chaque $x \in [0, 1]$, étudier $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis la suite d'intégrales $(\int_{[0,1]} \varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. (Cis01) Comme l'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est nulle, il existe $c_1 \in ]a,b[$ tel que $f$ s'annule en $c_1$ en changeant de signe.
Considérons la fonction $x \to (x-c_1)f(x)$. Elle s'annule en $c_1$ mais sans changer de signe. Or, par linéarité son intégrale est nulle. Elle doit donc s'annuler en changeant de signe en un point $c_2 \in ]a,b[$. Ce point est forcément distinct de $c_1$. On peut raisonner de même pour une troisième racine et d'autres autant de fois que les
$$\int_{[a,b]} f(x)x^k dx$$
sont nuls.

2. (Cis02) On peut interpréter $\frac{1}{2}$ comme une intégrale.
$$\frac{1}{2} = \int_{[0,1]} x\,dx$$
La condition s'écrit alors
$$\int_{[0,1]} (f(x) - x)\,dx = 0$$
Ce qui entraine que $f(x) - x$ s'annule en changeant de signe.

3. (Cis03) On va démontrer la limite demandée en utilisant la définition d'une limite.
Soit $\varepsilon > 0$.
En intégrant l'inégalité définissant $M$, on obtient
$$u_n \leq \left(\int_{[a,b]} M^n\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}} M.$$
Comme $((b-a)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*} \to 1$ et $\frac{M+\varepsilon}{M} > 1$, il existe $N_1$ tel que
$$n \geq N_1 \Rightarrow (b-a)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M+\varepsilon}{M}.$$
La fonction $f$ est continue sur le segement $[a,b]$. Elle atteint sa borne supérieure $M$. Il existe donc $u$ et $v$ tels que $a \leq u < v \leq b$ et
$$\forall x \in [u,v]\,,\; M - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x).$$
De plus $f$ est à valeur positive donc
$$\int_{[a,b]} f^n \geq \int_{[u,v]} f^n \geq \int_{[u,v]} (M - \frac{\varepsilon}{2})^n$$
$$\Rightarrow u_n \geq (v-u)^{\frac{1}{n}} (M - \frac{\varepsilon}{2})$$
Comme $((v-u)^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*} \to 1$ et $\frac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}} < 1$, il existe $N_2$ tel que
$$n \geq N_2 \Rightarrow (b-a)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}}.$$
On obtient alors,
$$n \geq \max(N_1, N_2) \Rightarrow$$
$$M - \varepsilon = \frac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}} M - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \frac{M+\varepsilon}{M} M = M + \varepsilon.$$
Pour l'autre limite, on pose $g = f^{-1}$, alors
$$\min f = \frac{1}{\max g}.$$
De plus
$$\left(\int_{[a,b]} g^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int_{[a,b]} f^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{v_n}.$$
En utilisant le premier résultat :
$$(\frac{1}{v_n}) \to \max g \Rightarrow (v_n) \to \frac{1}{\max g} = \min f.$$

4. (Cis04) L'intégrale $\int_{[0,\pi]} \sin f$ est nulle donc la fonction $\sin f$ s'annule dans l'ouvert en changeant de signe. Comme sin garde un signe constant sur $[0,\pi]$, c'est $f$ qui s'annule en changeant de signe (disons en $\theta_0$).
Considérons
$$\int_0^\pi f(t)\sin(t-\theta_0)\,dt = \cos\theta_0 \underbrace{\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt}_{=0}$$
$$- \sin\theta_0 \underbrace{\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt}_{=0} = 0.$$
La fonction $t \mapsto f(t)\sin(t-\theta)$ s'annule en changeant de signe dans l'ouvert (disons en $\theta_1$). De plus $\theta_1 \neq \theta_0$ car cette fonction *ne change pas de signe en* $\theta_0$ (les deux facteurs changent de signe donc le produit garde le même signe).

5. (Cis05) Notons
$$I_2 = \int_a^b f^2,\; I_3 = \int_a^b f^3,\; I_4 = \int_a^b f^4$$
et formons
$$0 = I_2 - 2I_3 + I_4 = \int_{[a,b]} f^2(f^2-1)^2$$
Comme la fonction à intégrer est continue et positive elle est identiquement nulle. Comme $f$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre que $f$ est constante de valeur 1 ou 0.

6. (Cis06) Supposons que l'intégrale soit positive et que la fonction ne soit pas de signe constant. Il existe alors $c \in [a,b]$ tel que $f(c) < 0$. Par continuité en $c$, il existe $\alpha < \beta$ dans $[a,b]$ tels que $f < 0$ dans $[\alpha,\beta]$. Écrivons alors :
$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f = \int_a^\alpha f + \underbrace{\int_\alpha^\beta f}_{<0} + \int_\beta^b f$$
$$< \int_a^\alpha f + \int_\beta^b f \leq \int_a^\alpha |f| + \int_\beta^b |f|$$
$$< \int_a^\alpha |f| + \int_\alpha^\beta |f| \int_a^\alpha |f| = \int_a^b |f|$$
Si $\int_a^b f < 0$, on considère $-f$.

7. (Cis07) On fait apparaitre des $\frac{k}{n}$ qui forment une subdivision régulière de $[0,1]$. La fonction se devine facilement :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\frac{k}{n})^2+(1-\frac{k}{n})^2} \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+(1-t)^2} \sim \frac{\pi}{2n}$$

Le calcul de l'intégrale est basique mais avec une primitive en arctan il relève donc plutôt de la feuille sur les relations entre intégrale et primitive.

8. (Cis08) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int_a^b 1\times\frac{dx}{x} \leq \sqrt{\int_a^b dx}\sqrt{\int_a^b \frac{dx}{x^2}} = \sqrt{b-a}\sqrt{-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

9. pas de correction pour Eis09.tex

10. (Cis10) La fonction de $t$ que l'on intègre est continue sur $[0,1]$.
    a. Les $e^{it_k}$ et $e^{-it_k}$ sont des racines $2n$-ièmes de l'unité mais la racine 1 figure deux fois alors que la racine $-1$ manque. On en déduit que le produit cherché est
    $$\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)$$
    b. Notons $R_n$ la somme de Riemann habituelle attachée à la subdivision régulière de $[0,\pi]$. Comme
    $$x^2-2\cos xt+1=(x-e^{it})(x-e^{-it})$$
    elle vaut
    $$R_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{it_k})(x-e^{-it_k})\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right)$$
    Si $|x|<1$, l'expression tend le ln converge donc $R_n$ tend vers 0 et $I(x)=0$.
    Si $|x|>1$, on peut réécrire sous une forme plus commode
    $$R_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\pi\ln(x^2)+\frac{\pi}{n}\ln(1-x^{-2n})$$
    On en déduit $I(x)=2\pi\ln|x|$.

11. pas de correction pour Eis11.tex

12. (Cis12)
    a. On découpe l'intervalle $[na,nb]$ en segments de longueur $2\pi$ en partant de $na$. En posant $K_n = \lfloor\frac{n(b-a)}{2\pi}\rfloor$, on peut écrire (en utilisant la valeur de l'intégrale donnée par l'énoncé)
    $$\int_{na}^{nb}|\sin| = \sum_{k=0}^{K_n-1}\int_{na+2k\pi}^{na+2(k+1)\pi}|\sin| + \int_{na+2K_n\pi}^{nb}|\sin| = 4K_n + \int_{na+2K_n\pi}^{nb}|\sin|$$
    Des encadrements
    $$0\leq \int_{na+2K_n\pi}^{nb}|\sin|\leq 2\pi$$
    et
    $$\frac{n(b-a)}{2\pi}-1<K_n\leq\frac{n(b-a)}{2\pi}$$
    on tire
    $$\left(\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}|\sin|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\to\frac{2}{\pi}(b-a)$$
    b. On commence par montrer la limite demandée pour une fonction $\varphi$ en escalier sur $[a,b]$. Cela résulte de la linéarite de l'intégrale et du résultat de a. appliqué à chaque segment d'une subdivision adaptée. Lorsque $f$ est continue par morceaux, on l'approche par des fonctions en escalier. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier $\varphi$ telle que
    $$|f-\varphi|\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
    dans $[a,b]$. On peut majorer la différence :
    $$\left|\frac{1}{n}\int_{na}^{nb}(f(\frac{u}{n})-\varphi(\frac{u}{n}))|\sin|\right| \leq \frac{1}{n}\int_{na}^{nb}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|\sin|\leq\frac{nb-na}{n}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}$$

13. (Cis13) On majore $\ln(1+x^2)$ par $\ln 2$ dans $[0,1]$ :
$$0\leq I_n\leq\ln 2\int_0^1 x^n dx = \frac{\ln 2}{n+1}$$
On conclut par le théorème d'encadrement.

14. (Cis14) Il s'agit d'une simple conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\sqrt{\int_{[0,1]}f}\sqrt{\int_{[0,1]}g}\geq\int_{[0,1]}fg\geq\int_{[0,1]}1=1.$$

15. (Cis15) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les fonctions $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ pour $f\in E$. Le minimum est atteint pour la fonction constante de valeur 1. Si $p(f)=1$, d'après le cas d'égalité dans Cauchy Schwarz, on doit avoir
$$\frac{\sqrt{f}}{\frac{1}{\sqrt{f}}}$$
constante c'est à dire $f$constante.

16. (Cis16) Avec l'indication de l'énoncé et par linéarité,
$$I_n=\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\frac{x}{n}}dx=\int_0^\pi\sin x\,dx-\frac{1}{n}\int_0^\pi x\sin x\,dx + \frac{1}{n^2}\int_0^\pi\frac{x^2\sin x}{1+\frac{x}{n}}dx.$$

Comme $\int_0^\pi x\sin x\,dx$ est un nombre fixé, la suite $\left(\frac{1}{n}\int_0^\pi x\sin x\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus,

$$\forall x\in[0,\pi],\ 0\leq \int_0^\pi \frac{x^2\sin x}{1+\frac{x}{n}}\,dx\leq \int_0^\pi x^2\sin x\,dx$$

qui est un nombre fixé. On en déduit que

$$(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\to\int_0^\pi \sin x\,dx=2.$$

17. (Cis17) Par linéarité, on se ramène au cas où $f(0)=0$. Notons

$$M=\max_{[0,1]}|f|.$$

Raisonnons à la Cesàro en coupant arbitrairement l'intégrale pour la majorer.

$$\forall\alpha\in\,]0,1[\,,\ |I_n|\leq\alpha\max_{[0,\alpha^n]}|f|+(1-\alpha)M.$$

Pour tout $\varepsilon>0$ :

$$\exists\alpha\in\,]0,1[\ \text{(proche de 1) tq } (1-\alpha)M\leq\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists\beta>0 \text{ tq } \max_{[0,\alpha^n]}|f|\leq\frac{\varepsilon}{2}\ \text{(continuité en 0)},$$
$$\exists N \text{ tq } n\geq N\Rightarrow\alpha^n<\beta.$$

On écrit alors la définition de la convergence vers 0.

18. (Cis18) La fonction est intégrable car en escalier :

| subdivision | $[0,1[$ | $[1,2[$ | $[2,3[$ | $[3,4[$ |
|---|---|---|---|---|
| valeurs | 0 | $\sin\frac{\pi}{4}$ | $\sin\frac{\pi}{2}$ | $\sin\frac{3\pi}{4}$ |

Son intégrale est $\frac{1}{\sqrt2}+1+\frac{1}{\sqrt2}=1+\sqrt2$.

19. (Cis19)
   a. Vérification facile. L'intégrale se calcule.
   b. On décompose arbitrairement l'intégrale avec un $a>0$ par relation de Chasles et on la majore par des inégalités de la moyenne. On obtient
   $$|K_n(f)|\leq\sup_{[0,a]}|f|+M_fk_n(a)$$
   où $M_f=\sup_{[0,1]}|f|$.
   Pour tout $\varepsilon>0$, comme $f\to0$ en 0, on choisit un $a>0$ assez petit pour que $\sup_{[0,a]}|f|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ce $a$ étant fixé, comme la suite $(k_n(a))_{n\in\mathbb{N}}\to0$, il existe un $N$ tel que $M_fk_n(a)<\frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n\geq N$. On en déduit la convergence vers 0 demandée.
   c. Dans le cas général,
   $$(K_n(f))_{n\in\mathbb{N}}\to f(0)$$
   En effet, par hypothèse et question b.,
   $$K_n(f)=f(0)\underbrace{K_n(1)}_{\to1}+\underbrace{K_n(f-f(0))}_{\to0}$$

20. On note $M_f=\sup_{[0,1]}|f|$.
   a. Vérification facile. L'intégrale se calcule, la suite géométrique est négligeable devant la suite en $\frac{1}{n}$.
   b. La convergence vers 0 se déduit de la majoration
   $$|K_n(f)|\leq M_f\int_{[0,1]}k_n$$
   c. On décompose arbitrairement l'intégrale avec un $a<1$ par relation de Chasles et on la majore par des inégalités de la moyenne en tenant compte de la croissance de $k_n$. On obtient
   $$|K_n(f)|\leq M_f\,a\,k_n(a)+\sup_{[a,1]}|f|\int_{[0,1]}k_n$$
   Pour tout $\varepsilon>0$, comme $f\to0$ en 1, on choisit un $a$ assez proche de 1 pour que $\sup_{[a,1]}|f|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ce $a$ étant fixé, comme la suite $(k_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(\int_{[0,1]}k_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un $N$ tel que $M_fak_n(a)<\frac{\varepsilon}{2}\int_{[0,1]}k_n$ dès que $n\geq N$.
   On en déduit la convergence vers 0 du quotient ce qui traduit la négligeabilité demandée.
   d. Si $f(1)\neq0$, la suite des $K_n(f)$ est équivalente à celle des $f(1)\int_{[0,1]}k_n$.
   En effet, par linéarité :
   $$K_n(f)=f(1)\int_{[0,1]}k_n+K_n(f-f(1))$$
   $$\sim f(1)\int_{[0,1]}k_n$$
   car la suite des $K_n(f-f(1))$ est négligeable devant celle des $f(1)\int_{[0,1]}k_n$.

21. (Cis21) Considérons la différence $T$ :

$$T=\sum_{k=a+1}^{b}f(k)-\int_a^b f(t)\,dt$$

et exprimons la avec des intégrales :

$$T=\sum_{k=a+1}^{b}\left(f(k)-\int_{k-1}^{k}f(t)\right)dt$$
$$=\sum_{k=a+1}^{b}\int_{k-1}^{k}(f(k)-f(t))\,dt$$

Comme $f$ est croissante et $t$ entre $k-1$ et $k$ :

$$0\leq\int_{k-1}^{k}(f(k)-f(t))\,dt\leq f(k)-f(k-1)$$

d'où

$$0\leq T\leq f(b)-f(a)$$
$$\Rightarrow\exists\theta\in[0,1]\ \text{tq } T=|f(b)-f(a)|\,\theta.$$

On applique le résultat précédent avec $a=1$, $b=n$ et $f(t)=\ln t$. Il existe $\theta_n$ entre 0 et 1 tel que

$$\ln(n!)=\int_1^n\ln t\,dt+\theta_n\ln n=[t\ln t-t]_1^n+\theta_n\ln n$$
$$=n\ln n-n+1+\theta_n\ln n$$

22. (Cis22) D'après la définition de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 1$, il existe un $\alpha > 0$ tel que
$$|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$
Considérons les $x_k = k\alpha$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors
$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 1 \Rightarrow |f(x_{k+1})| \leq 1 + |f(x_k)|$$
En sommant, on obtient
$$|f(x_k)| \leq |f(0)| + k = |f(0)| + \frac{1}{\alpha}x_k$$
Pour tout $x$ dans $I$, introduisons $q = \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor$ de sorte que
$$\begin{aligned} q\alpha \leq x < q\alpha + \alpha \Rightarrow |f(x)| &\leq |f(x) - f(x_q)| + |f(x_q)| \\ &\leq |f(x_0)| + q + 1 \leq |f(x_0)| + 1 + \frac{x}{\alpha} \end{aligned}$$
On peut donc choisir
$$a = |f(0)| + 1, \quad b = \frac{1}{\alpha}$$
Rien ne change si on se limite à un intervalle borné $[0, m[$. Sur un tel intervalle, une fonction continue qui n'est pas bornée (tend vers $+\infty$ en $m$ par exemple) n'est pas uniformément continue.

23. (Cis27) D'après la définition de la continuité uniforme, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-y| \leq \alpha$ entraine $|f(x) - f(y)| \leq 1$ pour $x$ et $y$ dans $I$. Soit $m = \lfloor \frac{b-a}{\alpha} \rfloor$. Il existe des points $x_1, x_2, \cdots, x_m$ régulièrement $\alpha$-espacés dans $I$. Tout élément de $I$ est alors $\alpha$-proche de l'un de ces $x_i$. On en déduit que $|f|$ est majoré par
$$\max(|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_m)|) + 1$$
Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $I$ qui converge vers $a$. Comme la fonction est bornée, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente
$$(f(a_n))_{n\in\mathcal{I}} \to l$$
Montrons maintenant que $f$ converge en $a$ vers $l$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité montre l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que
$$|u-v| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
Comme $(a_n)_{n\in\mathcal{I}} \to a$ et $(f(a_n))_{n\in\mathcal{I}} \to l$, il existe un $p \in \mathcal{I}$ tel que $a_p - a < \alpha$ et $|f(a_p) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut alors écrire que, pour tout $x \in ]a, a+\alpha[$,
$$\begin{aligned} |f(x) - l| \leq |f(x) - f(a_p)| &+ |f(a_p) - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
car $x$ et $a_p$ dans $]a, a+\alpha[$ entraine $|x - a_p| < \alpha$.

24. pas de correction pour Eis24.tex

25. (Cis25) Montrons puis utilisons l'inégalité proposée.
$$\begin{aligned} (\sqrt{x'-x})^2 - (\sqrt{x'} - \sqrt{x})^2 &= 2\sqrt{xx'} - 2x \\ &= 2\sqrt{x}(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x'} - \sqrt{x} \leq \sqrt{x'-x}. \end{aligned}$$
On en déduit que la fonction racine carrée est uniformément continue dans $[0, +\infty[$. En effet,
$$\forall \varepsilon,\ \exists \alpha\ (= \sqrt{\varepsilon}) \text{ tq } |x - x'| \leq \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right| \leq \varepsilon.$$
La fonction racine carrée n'est pas $k$-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$ car
$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \xrightarrow{0^{++}} +\infty.$$
Il ne peut donc exister de $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall (x, x') \in [0, +\infty[^2,\ x \neq x' \Rightarrow \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right|}{|x - x'|} \leq k.$$

26. (Cis26) Ici $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ et $f \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f \xrightarrow{+\infty} l$, il existe $A > 0$ tel que $x \geq A$ entraine $|f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Comme $f$ restreinte à $[0, A]$ est uniformément continue (thm de Heine), il existe $\alpha > 0$ tel, dans $[0, A]$, $|y - x| \leq \alpha$ entraine $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Montrons que dans $[0, +\infty[$,
$$|y - x| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Si $x$ et $y$ sont dans $[0, A]$, cela résulte directement de la définition de $\alpha$.
Si $x$ et $y$ sont dans $[A, +\infty[$,
$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - l| + |l - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
Si $A$ est entre les deux. Par exemple $x \leq A \leq y$ alors $A - x \leq y - x \leq \alpha$ donc
$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(A)| &+ |f(A) - l| \\ &+ |l - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

27. (Cis27) Notons $I$ l'intervalle sur lequel les fonctions sont définies (ce n'est pas forcément un segment) et $M_f$, $M_g$ des majorants de $|f|$, $|g|$. Le caractère uniformément continu de $f$ et $g$ se traduit par
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_{f,\varepsilon} > 0,\ \exists \alpha_{g,\varepsilon} > 0 \text{ tels que } \cdots$$
Majorons l'accroissement du produit en introduisant un terme croisé
$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| \\ &+ |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M_f\,|g(x) - g(y)| + M_g\,|f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$
On déduit que
$$\min(\alpha_{g,\frac{\varepsilon}{2M_f}}, \alpha_{f,\frac{\varepsilon}{2M_g}})$$
assure l'uniforme continuité de $fg$.

28. (Cis28)

   a. Avec des tableaux de variation, on montre que
   $$\forall x \geq 0,\ x - x^2 \leq \sin x \leq x.$$

   b. Introduisons des sommes de Riemann de fonctions dans $\mathcal{C}([0,1])$ avec la subdivision régulière $x_k = \frac{k}{n}$ pour $k$ entre 0 et $n$.
   $$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} + \frac{1}{2n}$$
   $$= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) f(x_k) + \frac{1}{2n} \quad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x+1}.$$
   On en déduit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \int_0^1 f(x)\,dx = \ln 2$.
   $$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+n)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\frac{k}{n}+1)^2} + \frac{1}{4n^2}$$
   $$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) g(x_k) + \frac{1}{4n^2}$$
   avec $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. On en déduit
   $$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \frac{1}{n} \int_0^1 g(x)\,dx \to 0.$$

   c. Notons $s_n$ la dernière somme. En intégrant l'encadrement du a. puis en sommant :
   $$a_n - b_n \leq s_n \leq a_n.$$
   Par le théorème d'encadrement, on conclut
   $$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ln 2.$$

29. (Cis29) On suppose $f$ $k$-lipschitzienne avec $k > 0$. Elle est continue et ne s'annule pas : elle garde donc un signe constant. Soit $m = \inf |f|$. Il existe $x_{min}$ tel que $m = f(x_{min} > 0$ car elle est définie sur un segment. Alors
$$\left| \frac{1}{f(y)} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)f(y)|} \leq \frac{k}{m^2} |x-y|.$$

30. (Cis30) On suppose $f, g$ respectivement $k_f, k_g$ lipschitziennes et $M_f, M_g$ bornées.
En introduisant un terme croisé, on montre que $fg$ est $k_f M_g + k_g M_f$ lipschitzienne.
La fonction $x \mapsto x$ dans $\mathbb{R}$ est 1 lipschitzienne mais elle n'est pas bornée. La fonction carrée $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne.

31. (Cis31)

   a. Notons $g$ et $h$ les fonctions considérées
   $$g(x) = f(x) - kx,\ h(x) = f(x) + kx.$$
   Montrons que $g$ est décroissante et $h$ croissante. Pour $x < y$ :
   $$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= f(y) - f(x) - k(y-x) \\ &= f(y) - f(x) - k|y-x| \\ &\leq |f(y) - f(x)| - k|y-x| \leq 0. \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= f(y) - f(x) + k(y-x) \\ &= f(y) - f(x) + k|y-x| \\ &\geq f(y) - f(x) + |f(y) - f(x)| \geq 0. \end{aligned}$$

   b. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue donc elle est bornée et converge au extrémités de l'intervalle voir l'exercice 23 (Eis23). La fonction prolongée reste lipschitzienne de même rapport par passage à la limite dans les inégalités.

   c. La question a. permet de déterminer les variations

   Cas $a < y < b$.

   | | $a$ | $y$ | $b$ |
   |---|---|---|---|
   | $\varphi_y(x)$ | $g(x)+ky$ | | $h(x)-ky$ |
   | | $\searrow$ | $f(y)$ | $\nearrow$ |

   Cas $y < a$. $\varphi_y(x) = h(x) - ky$, $\varphi_y$ est croissante.

   Cas $b < y$. $\varphi_y(x) = g(x) + ky$, $\varphi_y$ est décroissante.

   à compléter

32. (Cis32) Comme les fonctions sont bornées, il existe $M_f$ et $M_g$ tels que $|f(t)| \leq M_f$ et $|g(t)| \leq M_g$ pour tous les $t$ dans $I$. Considérons alors des réels $x$ et $y$ quelconques. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_x \in I$ tel que
$$\varphi(x) \leq f(t_x) + x g(t_x) + \varepsilon$$
D'autre part, par définition de $\varphi(y)$ comme borne supérieure :
$$f(t_x) + y g(t_x) \leq \varphi(y)$$
On en déduit
$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq (x-y) g(t_x) + \varepsilon \leq |x-y| M_g + \varepsilon$$
Comme ceci est valable pour tous les $\varepsilon > 0$, on a
$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq (x-y) M_g$$
En échangeant les rôles de $x$ et $y$, on obtient
$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq (x-y) M_g$$
Ce qui montre que $\varphi$ et $M_g$-lipschitzienne.

33. (Cis33) On multiplie membre à membre les inégalités de Cauchy-Schwarz appliquées à
$$x^2 f(x) = x^{\frac{3}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} f(x), \qquad f(x)^2 = x f(x)^{\frac{1}{2}}\, f(x)^{\frac{3}{2}}.$$
On obtient l'inégalité demandée après simplifications.
$$\left( \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 x^3\,dx \right) \left( \int_0^1 x f(x)^2\,dx \right)$$
$$\left( \int_0^1 x f(x)^2\,dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \right) \left( \int_0^1 f(x)^3\,dx \right)$$

34. (Cis34) Notons $m = \min_{[0,1]} f$, $M = \max_{[0,1]} f$. Alors :
$$(f - m \geq 0,\ f - M \leq 0) \Rightarrow (f - m)(F - M) \leq 0.$$

En intégrant, par positivité et linéarité,

$$\int_{[0,1]} (f-m)(F-M) \leq 0$$
$$\Rightarrow \int_{[0,1]} f^2 - (m+M)\underbrace{\int_{[0,1]} f}_{=0} + mM \leq 0.$$

35. (Cis35)Pour chaque $x > 0$, la suite des valeurs en $x$ stationnaire de valeur 0 (dès que $\frac{1}{n} < x$). Elle converge donc vers 0. Pour $x = 0$ elle est constante de valeur 0. En revanche la suite des intégrales est égale à $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle diverge vers $+\infty$.