1. (Eli01) Soit f définie sur $[0,+\infty[$ et bornée sur tout intervalle de longueur 1, soit g et ϕ définis par
$$\forall x \geq 0,\ g(x) = f(x+1) - f(x); \quad \forall x > 0,\ \phi(x) = \frac{f(x)}{x}$$
On suppose $g \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{R}$, montrer que $\phi \xrightarrow{+\infty} l$.
Donner un exemple de fonction montrant que l'hypothèse « bornée sur les intervalles de longueur 1 » est indispensable.

2. (Eli02) Soit f définie dans $[0,+\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$
Étudier la continuité de f aux points qui ne sont ni 0 ni des $\frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité aux points $\frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Tracer le graphe de f. Étudier la continuité de f en 0.

3. (Eli03) Étudier la continuité en tout point des applications suivantes :
$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$
Pour l'application g, les entiers p et q sont premiers entre eux.

4. (Eli04) On cherche à déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'expriment avec $f \circ \varphi$ pour diverses fonctions φ et diverses hypothèses sur f.
   a. f continue en 0, $\varphi(x) = 3x$ et $f = f \circ \varphi$.
   b. f continue en 1, $\varphi(x) = x^2$ et $f = -f \circ \varphi$.
   c. Pour a et b réels ($|a| \neq 1$), f continue en $u = \frac{b}{1-a}$, $\varphi(x) = ax + b$ et $f = f \circ \varphi$.
   d. f continue en 0 et 1, $\varphi(x) = x^2$ et $f = f \circ \varphi$.

5. (Eli05) Discuter suivant les réels a et b des limites strictement à droite et à gauche de 0 des fonctions de x suivantes :
$$x \to \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor, \qquad x \to \frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$$

6. (Eli06) Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ qui s'annule au moins une fois. Montrer que l'ensemble des points où elle s'annule admet un plus petit élément.

7. (Eli07) Soit f une fonction définie dans $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ à valeurs réelles et continue en x_0. Montrer que la fonction
$$h \to f(x_0 + h) - f(x_0 - h)$$
admet une limite finie (à préciser) en 0. Que dire de la réciproque ?

8. (Eli08) Montrer qu'une fonction périodique qui admet en $+\infty$ une limite finie est constante.
Montrer qu'il n'existe pas de fonction périodique qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.
Donner un exemple de fonction périodique non bornée.

9. (Eli09) Soit f une fonction monotone définie dans un segment $[a,b]$.
   a. On considère une famille finie quelconque :
   $$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$
   Établir l'inégalité
   $$\sum_{k=1}^{n} |f_d(x_k) - f_g(x_k)| \leq |f(b) - f(a)|$$
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
   $$D_n = \left\{ x \in]a,b[\text{ tel que } |f_d(x) - f_g(x)| > \frac{1}{n} \right\}$$
   Montrer que D_n est fini.
   c. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

10. (Eli10) Étudier la convergence en 0 des fonctions suivantes :
$$x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \qquad \sqrt{x} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \qquad \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + x}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - x}$$
où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

11. (Eli11) On définit une fonction f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ en posant :
$$\forall x \in [0,1] : \ f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Étudier la continuité de f en un $a \in [0,1]$. Montrer que f est bijective. Donner un exemple d'application bijective de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et partout discontinue.

12. (Eli12) Soit f et g définies dans un intervalle I, à valeurs réelles et telles que :
$$f \text{ décroissante}, \ \forall x \in I, g(x) = x f(x), \ g \text{ croissante.}$$
   a. On suppose $I = [0,+\infty[$ et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
   b. On suppose $I =]0,+\infty[$. Montrer que f et g sont continues en $a > 0$.

13. (Eli13) Fonctions semi-continues.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Une fonction f définie dans I est dite *semi-continue supérieurement* en a si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } : \quad \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) - f(a) \leq \varepsilon$$
De même, une fonction f définie dans I est dite *semi-continue inférieurement* en a si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } : \quad \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow \varepsilon \leq f(x) - f(a)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue dans I. On suppose que de plus que pour tout $a \in I$, la suite de nombre réels $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Montrer que l'on peut définir dans I des fonctions g et h par :

$$\forall a \in I, \begin{cases} g(x) = \inf\{f_n(a), n \in \mathbb{N}\} \\ h(x) = \sup\{f_n(a), n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

et que l'une est semi-continue supérieurement et l'autre inférieurement.

14. (Eli14) La fonction
$$\frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$
converge-t-elle en $+\infty$?

15. (Eli15) à compléter

16. (Eli16) à compléter

17. (Eli17) On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0, \qquad \left(e^{a_n} + e^{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 2$$
Que dire de ces deux suites ?

18. (Eli18) Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
Déterminer les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en lesquels f admet une limite et préciser la limite en ces éléments.

1. (Cli01) On se ramène au cas $l = 0$ en considérant $f - l$. On suppose donc $l = 0$.
On forme une inégalité « à la Césaro » en introduisant un y arbitraire. Pour tout $x > y$,
$$\begin{aligned} f(x) = (f(x) - f(x-1)) + (f(x-1) - f(x-2)) \\ + \cdots + (f(x-(n-1)) - f(x-n)) + f(x-n) \end{aligned}$$
avec
$$x - n - 1 < y \leq x - n \Rightarrow n = \lfloor x - y \rfloor$$
On en déduit
$$|f(x)| \leq n \sup_{[y,+\infty[} |g| + |f(x-n)|$$
De plus, $n \leq x$ et
$$\begin{aligned} y \leq x - n < y + 1 \Rightarrow x - n \in [y, y+1] \\ \Rightarrow |f(x-n)| \leq M_y = \sup_{[y,y+1]} |f| \\ \Rightarrow 0 \leq |\phi(x)| \leq \sup_{[y,+\infty[} |g| + \frac{M_y}{x} \end{aligned}$$
On peut alors traiter un $\varepsilon > 0$ quelconque exactement comme dans l'exercice sur la convergence de Cesaro en fixant d'abord un bon y pour que $\sup_{[y,+\infty[} |g| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Considérons la fonction 1-périodique f définie par
$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$
Comme f est 1-périodique, g est identiquement nulle donc converge vers 0 en $+\infty$. Mais en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; x_n = n + 1 - \frac{1}{n}$$
on forme une suite qui diverge vers $+\infty$ et telle que
$$f(x_n) = n \Rightarrow \phi(x_n) = \frac{n}{x_n} \Rightarrow (\phi(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \to 1$$

2. (Cli02) La fonction est continue en tous les réels a qui ne sont pas des inverses d'entiers. Si $a \neq 0$, la restriction de f à un intervalle assez petit autour de a est affine. La continuité en $a = 0$ résulte de
$$1 - x < f(x) \leq 1$$
La fonction est discontinue en $a = \frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ car
$$f \xrightarrow{\frac{1}{p}++} 1 - \frac{1}{p}, \qquad f \xrightarrow{\frac{1}{p}-} 1$$
Le graphe de la fonction est présenté en figure 1.

3. pas de correction pour Eli03.tex

4. (Cli04)
   a. à compléter
   b. à compléter

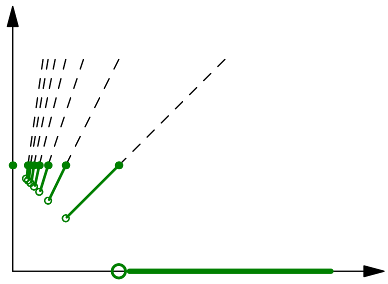

FIG. 1 – Exercice 2 : graphe de la fonction

   c. En fait u est le point fixe de φ :
$$\varphi(u) = u \Leftrightarrow au + b = u \Leftrightarrow u = \frac{b}{1-a}$$
Il conduit à une expression commode
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \varphi(x) = a(x-u) + u$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on en déduit
$$f(x) = f(a^n(x-u) + u)$$
Si $|a| < 1$, la suite $(a^n(x-u)+u)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u. Par continuité, la limite de cette suite constante est $f(x) = f(u)$. La fonction f est donc constante.
Si $|a| > 1$, on raisonne de même avec φ^{-1}. En effet, φ est bijective avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x-u) + u$$
et $f \circ \varphi^{-1} = f$ avec $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$.
   d. à compléter

5. (Cli05) à rédiger

6. (Cli06) Soit A l'ensembles des réels dans $[a, b]$ en lesquels la fonction f s'annule. Cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par a, elle admet donc une borne inférieure c qui vérifie $a \leq c$ car a est un minorant de A. D'autre part, il existe u dans A donc $c \leq u \leq b$. On en déduit que $c \in [a, b]$ donc f est continue en c.
D'après un résultat de cours, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers c.
Par définition de A, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur nulle. Elle converge donc vers 0.
Par continuité de f en c, cette suite converge aussi vers $f(c)$. Par unicité de la limite, on obtient alors $f(c) = 0$ donc $c \in A$ et $c = \min A$.

7. (Cli07) à rédiger

8. (Cli08) à rédiger

9. pas de correction pour Eli09.tex

10. pas de correction pour Eli10.tex

11. pas de correction pour Eli11.tex

12. (Cli12)
   a. Par définition, $g(0) = 0$. Comme g est croissante, elle est à valeurs positives ce qui entraîne que
$$\forall x > 0, \; f(x) \geq 0$$

Comme f est décroissante, on en déduit $f(0) \geq 0$.
Comme g est croissante dans $[0, \alpha]$ avec $g(0) = g(\alpha) = 0$, elle est identiquement nulle dans cet intervalle. Ceci prouve que $f(x) = 0$ pour $x \in]0, \alpha]$.
Comme f est décroissante et à valeurs positives, elle est aussi nulle au delà de α.

b. On exploite les monotonies de chaque côté de $a > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x \leq a \\ f \text{ décroissante} \\ g \text{ croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(a) \leq f(x) \\ g(x) \leq g(a) \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow f(a) \leq f(x) = \frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(a)}{x} = \frac{a}{x} f(a)$$

On en conclut par encadrement que $f \xrightarrow{a} f(a)$. La continuité de g résulte des opérations usuelles.

13. (Cli13) Comme pour chaque $a \in I$ l'ensemble de nombres réels
$$F_a = \{f_n(a), n \in \mathbb{N}\}$$
est borné, il admet une borne inférieure $g(a)$ et une borne supérieure $h(a)$.
Montrons que h est semi-continue inférieurement.
Pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $h(a) - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de F_a. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$h(a) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(a)$$
Comme f_n est continue en a, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f_n(a) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(a)$$
$$\Rightarrow h(a) - \varepsilon \leq f_n(a) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(a) \leq h(a)$$
De même que g est semi-continue supérieurement.

14. (Cli14) Notons f la fonction. Elle n'admet pas de limite en $+\infty$ car
$$f(n) = 1 \Rightarrow (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \to 1$$
$$f(n + \frac{1}{2}) = \frac{(n + \frac{1}{2})^{n + \frac{1}{2}}}{n^n} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{n}$$
$$\Rightarrow \left(f(n + \frac{1}{2})\right)_{n \in \mathbb{N}} \to +\infty$$

15. (Cli15) à compléter

16. pas de correction pour Eli16.tex

17. (Cli17) Elles convergent vers 0. En effet, on peut écrire
$$e^{a_n} + e^{b_n} = 2e^{\frac{a_n + b_n}{2}} \operatorname{ch} \frac{a_n - b_n}{2}$$
La continuité en 1 de la fonction argch et les hypothèses montre alors que $a_n - b_n$ converge vers 0 et on conclut par opérations à partir des décompositions
$$a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$
$$b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

18. pas de correction pour Eli18.tex