1. (Emf01) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$. Exprimer les matrices de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$.

2. (Emf02) Soit n un entier naturel non nul, on définit une matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n+1\}^2}$ par
$$a_{ij} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$
Préciser l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans $(1, X, \cdots, X^n)$ est A. Préciser la matrice inverse.

3. (Emf03) Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E et $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ avec
$$e'_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i.$$
Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de E et préciser les matrices de passage $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

4. (Emf04) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$. Déterminer la matrice de
$$P \to \int_0^1 P(t)dt$$
dans les bases $\mathcal{B}$ et (1).

5. (Emf05) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, $\mathcal{C} = (e_2, e_3, e_1)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ avec
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$
Quelle est la matrice de f dans $\mathcal{C}$?

6. (Emf06) Autour des racines carrées de matrices 2×2.
   a. Résoudre l'équation $X^2 = A$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour les matrices A suivantes :
   $$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}.$$
   b. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
   $$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{E}} f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Soit $\mathcal{V} = (e_1, e_1 + e_2)$. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{V}} f$ et préciser les matrices de passage.
   c. Résoudre l'équation
   $$X^2 + X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pourra ajouter $\frac{1}{4}I_2$ et se ramener à l'aide de la question b. à la deuxième équation de la question a.

7. (Emf07) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ défini par $f(X) = AX$. Former la matrice de f dans la base canonique
$$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$$
de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Quelle est sa trace ?
Généraliser en montrant que pour la multiplication des matrice $n \times n$, la trace est $n \operatorname{tr} A$.

8. (Emf08) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f^3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{U}$ de E telle que
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{U}} f \in \left\{0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, I_3, A, B, C, D\right\}$$
avec
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. (Emf09) Soit f l'endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E représenté dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ par la matrice
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ avec $u_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$.

10. (Emf10) Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que AB est la matrice d'un projecteur dont le rang est 2. Montrer que $BA = I_2$.

11. (Emf11) Soit E un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie et π un projecteur. Comparer $rg(\pi)$ et $tr(\pi)$.
Montrer que, si $u \circ u = pu$, alors $\frac{1}{p}u$ est un projecteur ($u \in \mathcal{L}(E)$, $p \in \mathbb{R}^*$)
Soit $\{f_1, \cdots, f_p\}$ une partie de $GL(E)$ stable pour $\circ$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{tr}(f_i) \equiv 0 \mod p$$

12. (Emf12) Soit H le plan de $\mathbb{R}^3$ formé par les (x, y, z) tels que
$$x - 2y + z = 0$$
Calculer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur H parallélement à $\operatorname{Vect}(u)$ avec
$$u = (1, 0, 1)$$

13. (Emf13) *Triangularisation*
On admet le résultat suivant :
Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et tout $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe x non nul dans E et un nombre complexe λ tels que
$$f(x) = \lambda x$$
Montrer le résultat suivant :
Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et tout

$f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{U}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{U}} f$ soit triangulaire supérieure. On raisonnera par récurrence en utilisant le théorème de la base incomplète et une projection.

14. (Emf14) Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension 3, soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} f = A$ avec
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ u_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ u_3 = e_2 - e_3 \end{cases}$$
Montrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E. Former $\operatorname{Mat}_{\mathcal{U}} f$ et la formule de changement de base. En déduire A^n.(voir l'exercice Emm04)

15. (Emf15) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E dont on précisera la matrice dans $\mathcal{B}$ vérifiant
$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(2e_1 + 3e_4) &= e_2 \end{aligned}$$
et
$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - t = 0 \end{cases}$$

16. (Emf16) Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de cardinal n de $GL(E)$. Montrer que
$$\dim \left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \operatorname*{Id}_E) \right) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} g$$

17. (Emf17) Soit a, b, c dans $\mathbb{R}^3$.
$$a = (1, 1, 1),\ b = (1, 0, 1),\ c = (1, 2, 3)$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection p sur $\operatorname{Vect}(a)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(b, c)$.

18. (Emf18) Endomorphismes de trace nulle.
    a. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que,
    $$\forall x \in E, x \neq 0_E,\ \exists \lambda(x) \in \mathbf{K} \text{ tel que } f(x) = \lambda(x) x.$$
    Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{K}$ tel que
    $$\forall x \in E,\ f(x) = \mu x$$
    b. Soit E de dimension finie n et f un endomorphisme *de trace nulle*. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente un 0 en position $1, 1$. Comment peut-on interpréter la matrice extraite associée aux indices i et j dans $[\![2, n]\!]$.
    c. Soit E de dimension finie n et f un endomorphisme *de trace nulle*. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f ne présente que des 0 sur la diagonale.

19. (Emf19) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{A} = (a_1, \cdots, a_p)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}} f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
Former une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = {}^t\operatorname{Mat}_{\mathcal{A}} f$

20. (Emf20) Soit E un ensemble et f une application de E dans E. On suppose qu'il existe sur E une addition interne et une multiplication externe par des nombres complexes qui définissent sur E une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie p pour laquelle f est un endomorphisme. On note $E_{\mathbb{C}}$ l'ensemble E considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f_{\mathbb{C}}$ l'application f considérée comme un endomorphisme de $E_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = (a_1, \cdots, a_p)$ une base de $E_{\mathbb{C}}$.
    a. Expliquer comment on peut définir sur E une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note
    $$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = (a_1, \cdots, a_p, ia_1, \cdots, ia_p)$$
    Montrer que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$.
    b. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ dans la base $\mathcal{A}$. Former, à l'aide de blocs, la matrice de $f_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

21. (Emf21) Soit S une matrice triangulaire supérieure. Former une matrice triangulaire inférieure semblable à S.

22. (Emf22) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit f^* de E^* dans E^* par :
$$\forall \varphi \in E^*,\ f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$
    a. Vérifier que $f^* \in \mathcal{L}(E^*)$.
    b. Soit $\mathcal{A} = (a_1, \cdots, a_n)$ une base de E et $\mathcal{A}^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la base duale. Soit
    $$M = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}}(f)$$
    Préciser
    $$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}^*}(f^*)$$

23. (Emf23) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et
$$\mathcal{A} = (a_1, \cdots, a_n), \qquad \mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$$
deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$. Exprimer en fonction de P la matrice de passage de $\mathcal{A}^*$ vers $\mathcal{B}^*$ (bases duales de E^*).

24. (Emf24) On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit
$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \qquad E = \operatorname{Vect}(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$$
Montrer que E est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et que $(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$ est une base de E. Former la matrice de la conjugaison dans cette base.

25. (Emf25) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$. Vérifier qu'ils sont supplémentaires. L'endomorphisme f est-il un projecteur ?

b. On définit $\overline{f}$ par

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(f) \rightarrow \operatorname{Im}(f) \\ \quad x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Montrer que c'est un automorphisme et former sa matrice ainsi que celle de sa bijection réciproque dans la base (e_1, e_2).

26. (Emf26) Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f \neq 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^2 = f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Soit W supplémentaire de $\ker f$ dans E et $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de W. Montrer qu'il existe

$$(v_1, v_2, \cdots, v_{n-2r}) \in E^{n-2r}$$

telle que

$$(e_1, \cdots, e_r, f(e_1), \cdots, f(e_r), v_1, v_2, \cdots, v_{n-2r})$$

soit une base de E. Écrire, à l'aide de blocs, la matrice de f dans cette base.

1. (mf01) Par définition des matrices de passage :
$$P_{\mathcal{B}\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Cette matrice traduit un système que l'on peut inverser pour exprimer l'autre matrice de passage
$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_2 = e_2 \\ u_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 \\ e_2 = u_2 \\ e_3 = -u_2 + u_3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow P_{\mathcal{U}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. pas de correction pour Emf02.tex
3. pas de correction pour Emf03.tex
4. pas de correction pour Emf04.tex
5. (Cmf05) Notons c_1, c_2, c_3 les trois vecteurs de $\mathcal{C}$.
$$f(c_1) = f(e_2) = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 = b'c_1 + c'b_2 + a'b_3$$
$$f(c_2) = f(e_3) = a''e_1 + b''e_2 + c''e_3 = b''c_1 + c''b_2 + a''b_3$$
$$f(c_3) = f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3 = bc_1 + cb_2 + ab_3$$
$$\Rightarrow \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b' & a'' & b \\ c' & c'' & c \\ a' & a'' & a \end{pmatrix}$$
Utiliser la formule de changement de base n'est pas une bonne idée. Mettons la en œuvre pour le montrer
$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
car $e_1 = c_3$, $e_2 = c_1$, $e_3 = c_2$. Il reste encore à calculer le produit
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}.$$

6. (Cmf06)
   a. On cherche les solutions sous la forme
$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ zx + tz & zy + t^2 \end{pmatrix}.$$
$$X^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = 9 \\ y(x+t) = 0 \\ (x+t)z = 4 \\ zy + t^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = 0 \\ (x+t)z = 4 \\ t^2 = 9 \end{cases}$$
   Comme $x + t \neq 0$, il y a seulement deux solutions
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
$$X^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = \frac{1}{4} \\ y(x+t) = 0 \\ (x+t)z = 1 \\ zy + t^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y = 0 \\ (x+t)z = 1 \\ t^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$
   Cette fois il y a 4 solutions car $|x| \neq |t|$,
$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, -X_1, -X_2.$$
   b. Inversons les expressions
$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 \\ e_2 = -v_1 + v_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P_{\mathcal{V}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   N'utilisons pas la formule de changement de base mais exprimons les images des vecteurs de $\mathcal{V}$ qui se lisent sur la matrice de f dans $\mathcal{E}$:
$$f(e_1) = f(e_2) = e_1 + e_2 = v_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(v_1) = f(e_1) = v_2 \\ f(v_2) = f(e_1) + f(e_2) = 2v_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   c. Suivons l'indication de l'énoncé en ajoutant $\frac{1}{4}I_2$:
$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X^2 + X + \frac{1}{4}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (X - \frac{1}{2}I_2)^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$
   Avec la formule de changement de base, le résultat de la question b. s'écrit
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{V}\mathcal{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(f)} P_{\mathcal{E}\mathcal{V}}$$
   Multiplions à gauche par $P_{\mathcal{V}\mathcal{E}}$ et à droite par $P_{\mathcal{E}\mathcal{V}}$. La relation devient
$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}I_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$
   avec $Y = P_{\mathcal{V}\mathcal{E}} X P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} - \frac{1}{4}I_2$.

On retombe sur la deuxième matrice de a. L'équation proposée ici admet donc 4 matrices solutions
$$\forall i \in [\![1, 4]\!], \quad P_{\mathcal{E}\mathcal{V}}\, X_i\, P_{\mathcal{V}\mathcal{E}} + \frac{1}{4}I_2$$
Après calculs ces solutions sont
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. pas de correction pour Emf07.tex
8. (Cmf08) On distingue 6 cas en discutant sur $\operatorname{rg}(f)$.
Cas 1. $\operatorname{rg}(f)=0$. La matrice est nulle dans n'importe quelle base.
Cas 2. $\operatorname{rg}(f)=1$ et la droite $\operatorname{Im}(f)$ est incluse dans le plan $\ker(f)$.
Cas 3. $\operatorname{rg}(f)=1$ et $\operatorname{Im}(f)\oplus\ker(f)=E$.
Cas 4. $\operatorname{rg}(f)=2$ et la droite $\ker(f)$ est incluse dans le plan $\operatorname{Im}(f)$.
Cas 5. $\operatorname{rg}(f)=2$ et $\operatorname{Im}(f)\oplus\ker(f)=E$.
Cas 6. $\operatorname{rg}(f)=3$. Alors f est bijective, en composant par f^{-1} :
$$f^2=f^3\Rightarrow \underset{E}{\mathrm{Id}}=f.$$
La matrice de f dans n'importe quelle base est I_3.
Cas 2. $\operatorname{rg}(f)=1$ et la droite $\operatorname{Im}(f)$ est incluse dans le plan $\ker(f)$.
Soit (u) une base de $\operatorname{Im}(f)$. Il existe un vecteur non nul w tel que $f(w)=u$. Comme $\operatorname{Im}(f)\subset\ker(f)$, il existe v tel que (u,v) base de $\ker(f)$. Vérifiez que $\mathcal{U}=(u,v,w)$ est une base de E. Dans ce cas
$$\underset{\mathcal{U}}{\mathrm{Mat}}\,(f)=D.$$
Cas 4. $\operatorname{rg}(f)=2$ et la droite $\ker(f)$ est incluse dans le plan $\operatorname{Im}(f)$. Soit (u) une base de $\ker(f)$, il existe v non nul tel que $u=f(v)$. L'existence d'un w tel que la matrice de f dans (u,v,w) soit C est plus délicate.
Remarquons que
$$f^2=f^3\Rightarrow (f-\underset{E}{\mathrm{Id}})\circ f^2=0_{\mathcal{L}(E)}.$$
Si on montre qu'il existe w_0 tel que $f^2(w_0)\neq 0_E$, on pourra poser $w=f^2(w_0)$ et on aura $f(w)=w$ ce qui permettra de conclure (en vérifiant que c'est bien une base). En fait $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f)\subset\ker(f)$ ce qui est faux dans ce cas 4 à cause des dimensions. Il existe donc bien un $w=f^2(w_0)$ non nul.
Cas 3 et 5. $\operatorname{Im}(f)$ est toujours stable par f, notons g la restriction de f à l'image. Le noyau et l'image sont supplémentaires donc (théorème noyau-image), g est bijective et on peut raisonner comme en 6 :
$$f^2=f^3\Rightarrow g^2=g^3\Rightarrow g=\underset{\operatorname{Im}(f)}{\mathrm{Id}}.$$
En concaténant une base de l'image et une base du noyau, on obtient A dans le cas 3 et B dans le cas 5.
9. (Cmf09) On remarque que
$$f(e_k)=(\alpha-\beta)e_k+\beta u_n$$
En sommant de 1 à i, on obtient
$$f(u_i)=(\alpha-\beta)u_i+i\beta u_n$$
d'où la matrice
$$\begin{pmatrix}\alpha-\beta & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta & 0\\ \beta & 2\beta & \cdots & (n-1)\beta & n\beta+\alpha-\beta\end{pmatrix}$$
10. (Cmf10) Soit E de dimension 2 avec une base $\mathcal{U}$. Soit F de dimension 3 avec une base $\mathcal{V}$. Soit $a\in\mathcal{L}(E,F)$ et $b\in\mathcal{L}(F,E)$ telles que
$$\underset{\mathcal{U},\mathcal{V}}{\mathrm{Mat}}(a)=A,\qquad \underset{\mathcal{V},\mathcal{U}}{\mathrm{Mat}}(b)=B$$
Pour montrer que AB est la matrice d'un projecteur, on calcule $(AB)^2$. On trouve I_3 ; ce qui prouve bien que AB est la matrice d'un projecteur. Avec les bases données
$$AB=\underset{\mathcal{U}}{\mathrm{Mat}}\,a\circ b$$
donc $a\circ b$ est un projecteur de E. Il est de rang 2 car son rang est égal à la trace de AB. De plus,
$$\left.\begin{aligned}&\dim E=2\\&\dim F=3\\&a\in\mathcal{L}(E,F)\\&b\in\mathcal{L}(F,E)\\&\operatorname{rg}(a\circ b)=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow a \text{ injective et } b \text{ surjective}$$
On en déduit
$$\begin{aligned}a\circ b\circ a\circ b=a\circ b&\Rightarrow a\circ\left(b\circ a-\underset{E}{\mathrm{Id}}\right)\circ b=0_{\mathcal{L}(F)}\\&\Rightarrow\left(b\circ a-\underset{E}{\mathrm{Id}}\right)\circ b=0_{\mathcal{L}(F,E)}\ \ \text{(car } a \text{ injective)}\\&\Rightarrow b\circ a-\underset{E}{\mathrm{Id}}=0_{\mathcal{L}(E)}\ \ \text{(car } a \text{ surjective)}\end{aligned}$$
11. pas de correction pour Emf11.tex
12. (Cmf12) Le projeté de $x\in\mathbb{R}^3$ sur $\ker\varphi$ parallélement à $\operatorname{Vect}(u)$ est
$$x-\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \text{ avec } \varphi((x,y,z))=x-2y+z,\quad u=(1,0,1),\ \varphi(u)=2.$$
Utilisons les matrices colonnes dans la base canonique pour former les images : $(1,0,0)$ se projete en
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\0\\-\frac12\end{pmatrix}.$$
Avec des calculs analogues pour les autres vecteurs, on en déduit la matrice
$$\begin{pmatrix}\frac12 & 1 & -\frac12\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac12 & 1 & \frac12.\end{pmatrix}$$
On peut aussi utiliser des coefficients indéterminés. Notons A la matrice demandée. D'après la formule vectorielle :
$$\begin{aligned}\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{x-2y+z}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\&=\frac12\begin{pmatrix}x+2y-z\\2y\\-x+2y+z\end{pmatrix}\\&\Rightarrow A=\frac12\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
On peut vérifier que $A^2=A$.

13. pas de correction pour Emf13.tex

14. (Cmf14) Comme $\mathcal{U}$ est formé de 3 vecteurs et que l'on a besoin des matrices de passage, le plus économique est de montrer que la famille est génératrice en exprimant les e en fonction des u. On tire des relations

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3}(u_1+u_2) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e_1 - u_1 + u_3) = \frac{1}{6}(-2u_1+u_2+3u_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(e_1 - u_1 - u_3) = \frac{1}{6}(-2u_1+u_2-3u_3) \end{cases}$$

On en déduit

$$P = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = P_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\underset{\mathcal{U}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

La formule de changement de base donne

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}.$$

15. (Cmf15) L'unique endomorphisme vérifiant les conditions imposées a pour matrice dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16. (Cmf16) Soit $s = \sum_{g\in G} g$. Comme chaque g est bijectif, chaque application

$$\begin{cases} G \to G \\ h \mapsto g\circ h \end{cases}$$

est injective donc bijective (car G est fini). On en déduit que $g\circ s = s$ puis que $s\circ s = ns$ et donc que $p = \frac{1}{n}s$ est un projecteur. On en tire

$$\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} g$$

Notons

$$I = \bigcap_{g\in G} \ker(g - \underset{E}{\mathrm{Id}})$$

de sorte que

$$x \in I \Leftrightarrow \forall g \in G,\ g(x) = x$$

On en déduit que $x\in I$ entraîne $s(x) = nx$ d'où $p(x) = x$ ce qui montre $I \subset \operatorname{Im} p$.
Réciproquement, on va exploiter $p\circ g = p = g\circ p$ qui a déjà été montré.

$$x \in \operatorname{Im} p \Rightarrow \forall g\in G,\ g(x) = g(p(x)) = p(x) = x$$

Donc $x \in I$ d'où $I = \operatorname{Im} p$ et l'égalité des dimensions.

17. (Cmf17) L'énoncé se traduit par

$$a = e_1+e_2+e_3,\ b = e_1+e_3,\ c = e_1+2e_2+3e_3$$

Comme p est la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(b,c)$, on en tire

$$e_2 = a - b \Rightarrow p(e_2) = a$$

$$c - a = e_2 + 2e_3 \Rightarrow -a = a + 2p(e_3) \Rightarrow p(e_3) = -a$$

$$p(b) = 0 \Rightarrow p(e_1) = -p(e_3) = a$$

Comme $a = e_1+e_2+e_3$, la matrice demandée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

18. (Cmf18)

a. On montre que $\lambda(x) = \lambda(y)$ pour x et y non nuls en distinguant deux cas suivant que (x,y) est libre ou lié. Notons μ cette valeur commune. Alors f est une homothétie de rapport μ, sa trace est $\mu\dim(E)\neq 0$.

b. Si $\operatorname{tr}(f) = 0$, d'après la question précédente, il existe $u_1 \neq 0_E$ tel que $(u_1, f(u_1))$ soit libre. On note $u_2 = f(u)$ et on complète (u_1,u_2) en une base $\mathcal{U} = (u_1,\cdots,u_n)$ de E. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$ alors $a_{11} = 0$ car c'est la coordonnée de $f(u_1) = u_2$ dans $\mathcal{U}$. En fait,

$$C_1(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons p la projection sur $V = \mathrm{Vect}(u_2,\cdots,u_n)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_1)$ et f_V la restriction de f à V. Alors

$$A_{[\![2,n]\!]\,[\![2,n]\!]} = \underset{(u_2,\cdots,u_n)}{\mathrm{Mat}} p\circ f_V$$

c. On utilise la question précédente en raisonnant par récurrence sur la dimension de l'espace.

19. (Cmf19) Il suffit d'inverser les vecteurs de la famille.

$$\mathcal{B} = (a_p, a_{p-1}, \cdots, a_1)$$

20. (Cmf20)

 a. On conserve la même addition interne et on restreint la multiplication externe par les complexes aux seuls réels. Il faut vérifier que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est libre et génératrice car on ne sait rien sur la dimension réelle.

 b. Soient U et V réelles telles que $A = U + iV$.

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{A}_\mathbb{R}} f_\mathbb{R} = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

21. (Cmf21) Intervertir les vecteurs d'une base :

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2, \cdots, u_p) \leftrightsquigarrow \mathcal{V} = (u_p, u_{p-1}, \cdots, u_1)$$

 Par exemple avec une matrice 3×3 représentant un endomorphisme g.

$$\operatorname*{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(g) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} g(e_3) = fe_3 + ee_2 + ce_1 \\ g(e_2) = de_2 + be_1 \\ g(e_1) = ae_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \operatorname*{Mat}_{(u_3,u_2,u_1)}(g) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

22. pas de correction pour Emf22.tex
23. pas de correction pour Emf23.tex
24. pas de correction pour Emf24.tex
25. pas de correction pour Emf25.tex
26. pas de correction pour Emf26.tex