1. (Eml01) **Projecteurs**. On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$. Dans tout l'exercice p et q sont deux projecteurs.
   a. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par u.
   b. Montrer que
   $$p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
   c. Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que $p + q$ soit un projecteur. Préciser alors $\text{Im}(p+q)$ et $\ker(p+q)$ à l'aide de $\text{Im}(p)$, $\ker(p)$, $\text{Im}(q)$, $\ker(q)$.
   d. Montrer que $p \circ q = q \circ p$ entraîne que $p \circ q$ est un projecteur. Préciser alors son noyau et son image.
2. (Eml02) Soit α une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E (c'est à dire un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$), soit u un élément non nul de E. On définit une application f de E dans E en posant $f(x) = \alpha(x)u$ pour tout élément x de E.
   a. Montrer que f est linéaire, montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $f \circ f = \lambda f$.
   b. Dans quel cas λ est-il non nul ? Montrer que $\frac{1}{\lambda} f$ est un projecteur dans ce cas. Préciser le noyau et l'image.
3. (Eml03) Soit f un endomorphisme de E. Montrer que
   $$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$$
   $$\text{Im} f = \text{Im} f^2 \Leftrightarrow \text{Im} f + \ker f = E$$
4. (Eml04) Soit E, F, G $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que
   $$\ker g \circ f = \ker f \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \ker g = \{0_F\}.$$
   $$\text{Im}\, g \circ f = \text{Im}\, g \Leftrightarrow \text{Im}\, f + \ker g = F.$$
5. (Eml05)
   a. Soit g et h dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ h = h \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $g - h = Id_E$. Montrer que $\ker g$ et $\ker h$ sont supplémentaires.
   b. Soit f un endomorphisme de E tel que
   $$f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
   Montrer que $\ker(f - 2Id_E)$ et $\ker(f - 3Id_E)$ sont supplémentaires.
6. (Eml06) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et a un nombre réel. On définit des formes linéaires s et α_a par :
   $$s(P) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\, dt \qquad \alpha_a(P) = \tilde{P}(a)$$
   Exprimer s comme combinaison linéaire de $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$
7. (Eml07) Multiplicateurs de Lagrange.
   Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel fixé. Sauf précision, toutes les formes linéaires sont relatives à cet espace.
   a. Soit α une forme linéaire non nulle et $a \in E$ tel que $\alpha(a) \neq 0$. Montrer que α est surjective et que les sous-espaces $\text{Vect}(a)$ et $\ker(\alpha)$ sont supplémentaires.
   b. Soient α, β des formes linéaires non nulles. Montrer que
   $$\ker \alpha \subset \ker \beta \Rightarrow \ker \alpha = \ker \beta$$
   c. Montrer qu'il existe une relation linéaire entre deux formes non nulles si et seulement si elles ont le même hyperplan noyau.
   d. Soient α, β, γ des formes linéaires non nulles dont les noyaux sont deux à deux distincts mais tels que
   $$\ker \alpha \cap \ker \beta \subset \ker \gamma$$
   En considérant la restriction notée α' de α à $\ker \beta$ et la restriction notée γ' de γ à $\ker \beta$, montrer qu'il existe une relation linéaire entre α, β, γ.
8. (Eml08) Soient A et B deux sous-espaces supplémentaires dans un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E. Soit $f \in \mathcal{L}(A, B)$, on définit g_f par :
   $$\begin{cases} A \rightarrow E \\ a \rightarrow g_f(a) = a + f(a) \end{cases}$$
   Montrer que g_f est linéaire et injective puis que $g_f(A)$ et B sont supplémentaires. Montrer que
   $$\forall a \in A,\ f(a) = -p_{B, g_f(A)}(a)$$
   Soit $\mathcal{S}(B)$ l'ensemble des supplémentaires de B. Montrer que l'application
   $$\begin{cases} \mathcal{L}(A, B) \rightarrow \mathcal{S}(B) \\ \quad f \rightarrow g_f(A) \end{cases}$$
   est bijective. (D'après alglin20)
9. (Eml09) Soit p et q des projecteurs dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On suppose $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et on note
   $$r = p + q - q \circ p$$
   Montrer que r est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de r à l'aide de ceux de p et q.
10. (Eml10) Soit E, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E tels que $\ker p$ soit stable par u. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(\text{Im}\, p)$ tel que $p \circ u = v \circ p$.
11. (Eml11) Soient P et Q dans $\mathbf{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
    $$P(f) \circ Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
    Montrer que $\ker P(f)$ et $\ker Q(f)$ sont supplémentaires.
12. (Eml12) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $a_0, a_1, \cdots, a_p \in \mathbf{K}$ tels que
    $$a_0 \operatorname*{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_p f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
    Montrer que $a_0 \neq 0_{\mathbf{K}}$ entraîne f bijective.
    Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\text{Id}_E - f$ est un automorphisme.
13. (Eml13) Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, $x \in E$, $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^p(x) \neq 0$.
    Montrer que $p < n$ et $(x, f(x), \cdots, f^p(x))$ libre.

14. (Eml14) Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$$\forall x \in E : \exists \lambda(x) \in K \text{ tq } f(x) = \lambda(x)x$$
Soit x et y deux vecteurs non nuls dans E. Montrer que $\lambda(x) = \lambda(y)$ en séparant les cas (x, y) libre ou lié.

15. (Eml15) Représentation linéaire d'un groupe fini.
Soit G un groupe fini et $\mathbf{K}$ un corps. On note E le $\mathbf{K}$-espace vectoriel de toutes les fonctions de G dans $\mathbf{K}$. Pour tout $g \in G$, on note $\overline{g} \in E$ définie par :
$$\forall h \in G,\ \overline{g}(h) = \begin{cases} 0 \text{ si } h \neq g \\ 1 \text{ si } h = g \end{cases}$$
Pour tout $g \in G$, on définit une fonction A_g de E dans E par :
$$\forall \varphi \in E,\ A_g(\varphi) = \begin{pmatrix} G \rightarrow \mathbf{K} \\ x \mapsto \varphi(hg) \end{pmatrix}$$
   a. Montrer que l'ensemble des $\overline{g}$ pour $g \in G$ forme une base de E.
   b. Montrer que $A_g \in \mathcal{L}(E)$. Vérifier que
$$\forall (g, h) \in G^2,\ A_g \circ A_h = A_{gh}$$
   c. Montrer que, pour g et h dans G, $A_g(\overline{h})$ est un $\overline{k}$ pour un $k \in G$ à préciser.

16. (Eml16) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$f \circ f = -\operatorname*{Id}_E$$
Montrer que f est un automorphisme et que, pour tout x non nul de E, la famille $(x, f(x))$ est libre.

17. (Eml17) Lemme des cinq.
On se donne des espaces vectoriels et des applications linéaires suivant le diagramme
$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{\alpha} & E_2 & \xrightarrow{\beta} & E_3 & \xrightarrow{\gamma} & E_4 & \xrightarrow{\delta} & E_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ E'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & E'_2 & \xrightarrow{\beta'} & E'_3 & \xrightarrow{\gamma'} & E'_4 & \xrightarrow{\delta'} & E'_5 \end{array}$$
On suppose de plus :
$$\operatorname{Im}\alpha = \ker\beta \qquad \operatorname{Im}\beta = \ker\gamma \qquad \operatorname{Im}\gamma = \ker\delta$$
$$\operatorname{Im}\alpha' = \ker\beta' \qquad \operatorname{Im}\beta' = \ker\gamma' \qquad \operatorname{Im}\gamma' = \ker\delta'$$
$$f_2 \circ \alpha = \alpha' \circ f_1 \qquad f_3 \circ \beta = \beta' \circ f_2 \qquad f_4 \circ \gamma = \gamma' \circ f_3$$
$$f_5 \circ \delta = \delta' \circ f_4$$
et enfin f_1, f_2 f_4, f_5 bijectives.
Montrer que f_3 est bijective.

18. (Eml18) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E et (α, β) une famille libre de formes linéaires.
   a. Montrer que
$$\ker\alpha \cap \ker\beta \text{ et } \operatorname{Vect}(u, v) \text{ supplémentaires} \Leftrightarrow \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v) \neq 0$$
   b. On suppose qu'il existe $(a, b) \in E^2$ tel que
$$\alpha(a) = 1,\ \beta(a) = 0,\ \alpha(b) = 0,\ \beta(b) = 1$$
   Exprimer, en fonction de α, β, a, b, la projection p sur $\ker\alpha \cap \ker\beta$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(a, b)$.
   c. On suppose
$$\alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v) \neq 0$$
   Montrer qu'il existe un unique $(a, b) \in \operatorname{Vect}(u, v)^2$ vérifiant les conditions de la question précédente. En déduire une expression de la projection p.

19. (Eml19) Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que
$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)) = f^{-1}(\ker(g))$$

20. (Eml20) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ et $x \notin \ker(f)$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) \neq 0_E$$

21. (Eml21) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f\left(\ker(f^2)\right)$$

22. (Eml22) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit a et b dans E et α, β dans $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$. On définit f et g par :
$$\forall x \in E, \qquad \begin{cases} f(x) = \alpha(x)\, a \\ g(x) = \beta(x)\, b \end{cases}$$
Montrer que f et g sont des endomorphismes de E et que (f, g) libre dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si (a, b) libre dans E ou (α, β) libre dans E^*.

23. (Eml23) On définit trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$\varphi_1((x, y, z)) = -x + y + z$$
$$\varphi_2((x, y, z)) = 2x - y - z$$
$$\varphi_3((x, y, z)) = x + 2y + z$$
Les exprimer comme combinaison linéaire des formes coordonnées dans la base canonique.
La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est-elle libre dans $(\mathbb{R}^3)^*$?

24. (Eml24) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \operatorname{Id}_E$ et $a \in \mathbb{C}$. On pose
$$g = \operatorname*{Id}_E - af$$
Montrer que
$$a \notin \mathbb{U}_3 \Rightarrow g \text{ bijective.}$$
Exprimer alors g^{-1} à l'aide de $\operatorname{Id}_E, f, f^2$.

25. (Eml25) Encore des projecteurs ?
Soit f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que
$$f + g \in Gl(E) \qquad f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$$
Montrer que
– $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires,
– $\ker f$ et $\ker g$ sont supplémentaires,

– $\operatorname{Im} f = \ker g$ et $\operatorname{Im} g = \ker f$.

Soit $\varphi = f + g$, les endomorphismes $f \circ \varphi^{-1}$ et $g \circ \varphi^{-1}$ sont-ils des projecteurs ?

26. (Eml26) Soit E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,F)$, $k \in \mathcal{L}(F,E)$. Montrer que

$$\left.\begin{array}{r} f = h \circ g \circ f \\ g = g \circ f \circ k \end{array}\right\} \Rightarrow \ker g \oplus \operatorname{Im} f = F.$$

27. (Eml27) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, p un projecteur et $q = \operatorname{Id}_E - p$,

$$\begin{aligned} F &= \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \exists u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f = u \circ p\} \\ G &= \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \exists u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f = u \circ q\}. \end{aligned}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

1. pas de correction pour Eml01.tex
2. pas de correction pour Eml02.tex
3. pas de correction pour Eml03.tex
4. pas de correction pour Eml04.tex
5. pas de correction pour Eml05.tex
6. pas de correction pour Eml06.tex
7. pas de correction pour Eml07.tex
8. (Cml08) La vérification de la linéarité de g_f est immédiate. Montrons que son noyau est réduit au vecteur nul.
$$a \in \ker g_f \Rightarrow a = -f(a) \in A \cap B = \{0_E\}$$
Montrons que $g_f(A)$ et B sont supplémentaires.
Soit $b \in g_f(A) \cap B$. Il existe $a \in A$ tel que $b = a + f(a)$ donc $a = b - f(a) \in A \cap B$. Il est donc nul ce qui entraine $b = 0_E$.
Soit $x \in E$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Alors
$$x = a + f(a) + b - f(a) = g_f(a) + \underbrace{b - f(a)}_{\in B}$$
Ce qui montre que B et $g_f(A)$ sont supplémentaires.
Pour tout $a \in A$, on peut écrire $a = g_f(a) - f(a)$. C'est une décomposition de a dans les espaces supplémentaires $g_f(A)$ et B. On en déduit que $-f(a)$ est le projeté de a sur B dans la direction de $g_f(A)$.
Notons γ l'application $f \to g_f(A)$.
Soit C un supplémentaire de B.
S'il existe un $f \in \mathcal{L}(A, B)$ tel que $\gamma(f) = C$, d'après la question précédente, il doit vérifier $f = -p_{B,C}$. Ce qui assure l'injectivité.
Posons $f = -p_{B,C}$. Alors, pour tout $a \in A$,
$$g_f(a) = a - p_{B,C}(a) = p_{C,B}(a) \subset C$$
Réciproquement, pour tout $c \in C$, notons $a = p_{A,B}(c)$ et calculons $g_f(a)$:
$$\begin{aligned} g_f(a) &= a - p_{B,C}(a) = p_{C,B}(a) = p_{C,B}(p_{A,B}(c)) \\ &= p_{C,B}(c - p_{B,A}(c)) = p_{C,B}(c) = c \end{aligned}$$
9. (Cml09) Après diverses simplifications résultant des relations $p \circ q = 0$, $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, on obtient
$$r \circ r = r$$
On en déduit que r est un projecteur. Il est clair que $\ker p \cap \ker q \subset \ker r$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \ker r$. En composant prenant l'image par p de $r(x) = 0$, on obtient $p(x) = 0$, on en déduit $q(x) = 0$. On a donc
$$\ker r = \ker p \cap \ker q$$
D'après l'expression de r, il est clair que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, il existe a et b tels que $x = p(a) + q(b)$. Comme on sait que r est un projecteur, pour montrer que x est dans l'image de r, il est naturel de chercher à montrer qu'il est sa propre image. Calculons donc :
$$\begin{aligned} r(x) &= p(p(a)) + p(q(b)) + q(p(a)) + q(q(b)) \\ &\quad - q \circ p(p(a)) - q \circ p(q(b)) \\ &= p(a) + q \circ p(a) + q(b) - q \circ p(a) \\ &= p(a) + q(b) = x \end{aligned}$$
On a donc bien
$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$$
10. pas de correction pour Eml10.tex
11. pas de correction pour Eml11.tex
12. (Cml12) On fait passer l'identité de l'autre côté. Comme $-a_0 \operatorname{Id}_E$ est bijective,
$$f \circ \left(a_1 \operatorname{Id}_E + \cdots + a_p f^{p-1}\right) = -a_0 \operatorname{Id}_E$$
entraîne f surjective et
$$\left(a_1 \operatorname{Id}_E + \cdots + a_p f^{p-1}\right) \circ f = -a_0 \operatorname{Id}_E$$
entraîne f injective.
13. (Cml13) Soit m le plus petit entier k tel que $f^k(x) = 0$. (Il en existe : au moins n). On considère une combinaison linéaire nulle. Alors $f^{m-1}(x) \neq 0_E$.
$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_p f^p(x) = 0_E$$
On compose par f^{m-1}. On en déduit $\lambda_0 = 0$ et ainsi de suite en composant par $f^{m-2}, \cdots$.
14. (Cml14) Dans le cas où (x, y) est libre, considérons $x + y$ et exploitons la linéarité de f
$$\begin{aligned} &f(x+y) = f(x) + f(y) \\ &\Rightarrow \lambda(x+y)(x+y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y \\ &\Rightarrow (\lambda(x+y) - \lambda(x))\, x + (\lambda(x+y) - \lambda(y))\, y = 0_E \\ &\Rightarrow \lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y) \end{aligned}$$
car la famille (x, y) est libre.
Dans le cas où la famille est liée ; comme $x \neq 0_E$, il existe $\mu \in \mathbf{K}$ tel que $y = \mu x$ avec $\mu \neq 0_{\mathbf{K}}$ car $y \neq 0_E$:
$$\begin{aligned} &f(y) = \mu f(x) \Rightarrow \lambda(y)y = \mu\lambda(x)x \\ &\Rightarrow \lambda(y)\mu x = \mu\lambda(x)x \Rightarrow \lambda(y) = \lambda(x) \end{aligned}$$
car $\mu \neq 0_K$ et $x \neq 0_E$.
15. (Cml15)
   a. base à rédiger
   b. linéarité et compo à rédiger
   c. On trouve
   $$A_g(\overline{h}) = \overline{g^{-1}h}$$
16. (Cml16) De $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$, on tire que f est bijective de bijection réciproque $-f$.
Soit x non nul et λ, μ réels tels que
$$\lambda x + \mu f(x) = 0_E$$

On compose par f :

$$-\mu x + \lambda f(x) = 0_E$$

Si $\lambda \neq 0$, on peut multiplier la deuxième relation par $-\frac{\mu}{\lambda}$ et ajouter à la première. On en tire

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda} x = 0_E$$

Ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \neq 0_E$. On doit donc avoir $\lambda = 0$. Comme f est bijective, $x \neq 0_E$ entraîne $f(x) \neq 0_E$ donc $\mu = 0$.

17. pas de correction pour Eml17.tex
18. (Cml18)
   a. On note

   $$D = \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v)$$

   Supposons $D \neq 0$ et montrons que les sous-espaces sont supplémentaires .
   Analyse-unicité. Soit x un vecteur quelconque, supposons qu'il se décompose. Il existe alors $h \in \ker\alpha \cap \ker\beta$ et des scalaires λ et μ tels que

   $$x = h + \lambda u + \mu v$$

   En calculant $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, on forme un système

   $$\begin{cases} \alpha(u)\lambda + \alpha(v)\mu = \alpha(x) \\ \beta(u)\lambda + \beta(v)\mu = \beta(x) \end{cases}$$

   Comme $D \neq 0$, le système est de Cramer. Les seules valeurs possibles pour λ et μ sont données par les formules de Cramer, le h est alors déterminé par décomposition idiote. Ceci assure l'unicité d'une éventuelle décomposition.
   Synthèse-existence. Pour tout vecteur x, définissons des scalaires λ et μ par :

   $$\lambda = \frac{1}{D}(\alpha(x)\beta(v) - \beta(x)\alpha(v))$$
   $$\mu = \frac{1}{D}(\alpha(u)\beta(x) - \beta(u)\alpha(x))$$

   On peut écrire

   $$x = (x - \lambda u - \mu v) + \lambda u + \mu v$$

   et vérifier que $(x - \lambda u - \mu v)$ est dans l'intersection des deux noyaux.
   Réciproquement, on va montrer la contraposée.

   $$\begin{aligned} D = 0 &\Rightarrow \alpha(u)\beta(v) - \beta(u)\alpha(v) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha\left(\beta(v)u - \beta(u)v\right) = 0 \\ &\Rightarrow \beta(v)u - \beta(u)v \in \ker\alpha \end{aligned}$$

   Or

   $$\beta\left(\beta(v)u - \beta(u)v\right) = \beta(v)\beta(u) - \beta(u)\beta(v) = 0$$

   donc $w = \beta(v)u - \beta(u)v$ est un vecteur dans l'intersection des deux sous-espaces.
   - Si $w \neq 0$, ils ne sont pas supplémentaires car leur intersection ne se réduit pas au vecteur nul.
   - Si $w = 0$, comme (u, v) est libre, $\beta(u) = \beta(v) = 0$ donc $\text{Vect}(u, v) \subset \ker\beta$ et la somme est incluse dans $\ker\beta$. Ils ne sont donc pas supplémentaires.

   b. Dans les conditions de cette question, l'analyse d'une décomposition montre que

   $$p(x) = x - \alpha(x)a - \beta(x)b$$

   c. Chacun des vecteurs a et b doit être une combinaison de u et v. Les conditions se traduisent par un système de Cramer pour les coefficients. On trouve

   $$a = \frac{\beta(v)}{D}u - \frac{\beta(u)}{D}v$$
   $$b = -\frac{\alpha(v)}{D}u + \frac{\alpha(u)}{D}v$$

   On en déduit

   $$p(x) = x - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(x) & \alpha(v) \\ \beta(x) & \beta(v) \end{vmatrix}}{D}u - \frac{\begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(x) \\ \beta(u) & \beta(x) \end{vmatrix}}{D}v$$

   Voir l'exercice **??** (ev26) pour une approche plus concrète.
19. pas de correction pour Eml19.tex
20. pas de correction pour Eml20.tex
21. pas de correction pour Eml21.tex
22. pas de correction pour Eml22.tex
23. pas de correction pour Eml23.tex
24. pas de correction pour Eml24.tex
25. (Cml25) début du corrigé à compléter. Notons

   $$p = f \circ \varphi^{-1} \qquad q = g \circ \varphi^{-1}$$

   Ce sont bien des projecteurs car

   $$\begin{aligned} p + q = (f + g) \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Id}_E \\ \Rightarrow \forall x \in E,\ x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Im} g} \end{aligned}$$

   avec $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ supplémentaires donc p est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallélement à $\operatorname{Im} g$ et q est la projection sur $\operatorname{Im} g$ parallélement à $\operatorname{Im} f$.
26. pas de correction pour Eml26.tex
27. pas de correction pour Eml27.tex