1. (Emm01) Soit n un entier pair, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite *en damier* si et seulement si il existe α et β dans $\mathbf{K}$ tels que
$$m_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad i+j \text{ pair} \\ \beta & \text{si} \quad i+j \text{ impair} \end{cases}$$
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices en damier. Étudier les stabilités de $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?
Si M est une matrice en damier, montrer qu'il existe λ et μ dans $\mathbf{K}$ tels que $M^3 = \lambda M^2 + \mu M$.

2. (Emm02) Soit δ application de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ définie par :
$$\delta(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = ad - bc$$
   a. Montrer que
$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})^2 : \ \delta(AB) = \delta(A)\delta(B)$$
   b. Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\delta(A) \neq 0$ et que dans ce cas
$$A^{-1} = \frac{1}{\delta(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3. (Emm03) Corps des quaternions.
Soit
$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{bmatrix}, (u,v) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$
Montrer que $\mathbb{H}$ est une sous $\mathbb{R}$-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que tout élément non nul q de $\mathbb{H}$ est inversible.

4. (Emm04) On considère la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Montrer l'existence de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$
Exprimer α_n et β_n en fonction de n. En déduire A^n. (voir l'exercice Emf14)

5. (Emm05) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que
$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2 : \varphi(XY) = \varphi(YX)$$
Montrer qu'il existe α tel que $\varphi = \alpha$ tr.

6. (Emm06) Soit A non nulle et B donnés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $X + (\text{tr } X)A = B$.

7. (Emm07) Montrer que le produit de deux matrices carrées symétriques est symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.

8. (Emm08) *Produit par blocs (Cours).*
Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ telles que
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$
$A \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{s,n-t}(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m-s,t}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_{m-s,n-t}(\mathbf{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{t,r}(\mathbf{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{t,p-r}(\mathbf{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n-t,r}(\mathbf{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{n-t,p-r}(\mathbf{K})$.
Montrer que
$$MM' = \begin{bmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{bmatrix}$$
Retenir que le produit par blocs est exact lorsque les dimensions des blocs le permettent. Ceci se généralise à des décompositions en davantage de blocs.

9. (Emm09) Soit B une matrice carrée. Quel est le terme i,i de la matrice $B\,{}^tB$?
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, montrer que
$$AX\,{}^tX = 0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})} \Rightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})}$$
On pourra considérer les termes de la diagonale de $AX\,{}^tX\,{}^tA$.

10. (Emm10) Soit n un entier naturel non nul. On désigne par $\mathcal{C}$ la partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée par les matrices M telles que $m_{i,j} = 0$ si j ne divise pas i.
Une matrice diagonale est-elle dans $\mathcal{C}$? Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de l'algèbre des matrices triangulaires inférieures. (voir l'exercice sur le déterminant de Smith)

11. (Emm11) Matrice circulante. Soit $a_1, \cdots, a_n$ dans $\mathbb{C}$ et $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Le polynôme P est défini par
$$P = a_1 + a_2 X + \cdots + a_n X^{n-1}$$
On définit les matrices D, A, M $(n \times n)$. La matrice D diagonale avec des $P(w^{i-1})$ sur la diagonale et :
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^{2.2} & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$
Exprimer AM à l'aide de M et D.

12. (Emm12) Centre de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Montrer que A commute avec toutes les matrices élémentaires si et seulement si $A \in \text{Vect}(I_p)$.

13. (Emm13) Calculer les puissances $n \in \mathbb{N}$ des matrices :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. (Emm14) Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que
$$A + B = AB$$
Montrer que $A - I_n$ est inversible et préciser son inverse.

15. (Emm15) Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour i et j entre 1 et n, que vaut $X_i\,{}^tX_j$? Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, montrer que les $Y_i\,{}^tY_j$ pour i et j entre 1 et n forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

16. (Emm16) Matrices de diagonale nulle.
    a. Soit $D \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ diagonale dont les termes de la diagonale sont deux à deux distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, calculer $AD - DA$.
    b. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ tel que $M = AD - DA$.
17. (Emm17)
    a. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que,
    $$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \mathrm{tr}(AC) = \mathrm{tr}(BC)$$
    Montrer que $A = B$.
    b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que :
    $$\forall (B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2,\ \mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$$
    Montrer que A est de la forme λI_n.
18. (Emm18) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que
    $$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$
    Ce résultat est utilisé dans l'exercice mm20.
19. (Emm19) La famille suivante est-elle libre dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$?
    $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
    $$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$
20. (Emm20) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ fixée, on définit l'application
    $$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$$
    On note
    $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \Delta = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$
    $$T_s = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix},\ T_i = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$$
    a. Montrer que $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset \ker \Phi$.
    b. Montrer que $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect}(\Delta, T_s, T_i)$.
    c. Montrer que $A \notin \mathrm{Vect}(I)$ entraîne (Δ, T_s, T_i) liée et préciser une relation linéaire.
    d. Montrer que
    $$\mathrm{rg}(\Phi) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \in \mathrm{Vect}(I_2) \\ 2 \text{ si } A \notin \mathrm{Vect}(I_2) \end{cases}$$
    En déduire que B commute avec A si et seulement si (I_2, A, B) liée.
21. (Emm21) Condition de Hadamard.
    Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telle que
    $$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Soit $m \in [\![1, p]\!]$ tel que
    $$|x_m| = \max(x_1, \cdots, x_p)$$
    Montrer que
    $$|a_{mm}| \leq \sum_{j \neq m} |a_{mj}|$$

1. pas de correction pour Emm01.tex
2. pas de correction pour Emm02.tex
3. pas de correction pour Emm03.tex
4. (Cmm04) Par un simple calcul matriciel, il vient
$$A^3 = A^2 + 2A$$
On peut poser $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$ avec
$$\alpha_1 = 1 \quad \beta_1 = 0$$
$$\alpha_2 = 0 \quad \beta_2 = 1$$
On forme des relations de récurrence
$$\begin{aligned} &A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2 \\ &\Rightarrow A^{n+1} = \alpha_n A^2 + \beta_n A^3 = (\alpha_n + \beta_n)A^2 + 2\beta_n A^3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{n+1} = 2\beta_n \\ \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta_n \end{cases} \end{aligned}$$
On en déduit que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2
$$\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 2\beta_n$$
Les racines de l'équation caractéristiques sont 2 et -1. La valeur $\beta_0 = \frac{1}{2}$ est cohérente avec la relation et les valeurs de β_2 et β_1. On en déduit après calcul
$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}(-1)^{n-1} \\ \beta_n = \dfrac{1}{6}2^n + \dfrac{1}{3}(-1)^n \end{cases}$$
5. pas de correction pour Emm05.tex
6. pas de correction pour Emm06.tex
7. pas de correction pour Emm07.tex
8. pas de correction pour Emm08.tex
9. (Cmm09) le terme i,i de la matrice $B\,{}^tB$ est $\sum_j b_{i,j}^2$.
Comme $AX\,{}^tX$ est une matrice à q colonnes, on peut la multiplier par ${}^tA$ qui a q lignes. On exploite ensuite l'associativité du produit matriciel.
$$0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})} = AX\,{}^tX{}^tA = (AX)\,{}^t(AX)$$
Prenns AX dans le rôle de B. Dans $\mathbb{R}$, une somme de carrés n'est nulle que si tous les termes sont nuls. Le calcul du début montre alors que $AX = 0_{\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})}$.
10. pas de correction pour Emm10.tex
11. On trouve $AM = MD$.
12. pas de correction pour Emm12.tex
13. (Cmm13) Calcul des puissances :
$$\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n \end{pmatrix}.$$
14. (Cmm14) Par un simple calcul dans l'algèbre des matrices carrées, $A - I_n$ est inversible d'inverse $B - I_n$.
$$\begin{aligned} A+B = AB \Rightarrow (A-I)B = A \Rightarrow (A-I)B-I = A-I \\ \Rightarrow (A-I)(B-I) = I \end{aligned}$$
On ne pourra pas obtenir directement par le calcul le produit dans l'autre sens mais on peut le déduire du résultat général : pour une matrice carrée, inversible à droite est équivalent à inversible à gauche.
15. (Cmm15) Par définition du produit matriciel, $X_i\,{}^tXj$ est la matrice élémentaire $E_{i,j}$. Ces matrices forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Notons M la matrice dont les colonnes sont les Y_i de sorte que $C_i(M) = Y_i$. Comme $M = M\,I_n$, on a aussi
$$Y_i = C_i(M) = C_i(M\,I_n) = M\,C_i(I_n) = M\,X_i$$
En remplaçant, on obtient
$$Y_i\,{}^tYj = P\left(X_i\,{}^tXj\right)\,{}^tP$$
On conclut en remarquant que l'application
$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ X \mapsto P\,X\,{}^tP \end{cases}$$
est un isomorphisme et transforme donc une base en une base.
16. (Cmm16) Matrices de diagonale nulle.
   a. Le terme d'indice i,j de $AD - DA$ est $(d_j - d_i)a_{ij}$. Tous les termes de la diagonale sont donc nuls. On peut remarquer aussi que, comme les termes de la diagonale de D sont deux à deux distincts, $AD - DA = 0$ entraine que A est diagonale.
   b. Considérons l'application φ
$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \\ A \mapsto AD - DA \end{cases}$$
Cette fonction est un endomorphisme. D'après la question précdente, son image est inclus dans le sous-espace des matrices à diagonale nulle qui est de dimension $p^2 - p$. On en tire
$$\operatorname{rg}\varphi \leq p^2 - p$$
La question précédente montre aussi que le noyau est formé des matrices diagonales qui est un sous-espace de dimension p. Le théorème du rang donne
$$p^2 = \dim(\ker\varphi) + \operatorname{rg}\varphi \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\varphi) = p^2 - p$$
On en tire que $\operatorname{Im}\varphi$ est exactement formé des matrices à diagonale nulle ce qui répond à la question.
17. pas de correction pour Emm17.tex
18. (Cmm18) Pour toute $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, considérerons
$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \to \mathbf{K} \\ M \mapsto \operatorname{tr}(AM) \end{cases}.$$

Il est clair que φ_A est une forme linéaire. Il s'agit de montrer que toute forme linéaire sur les matrices est de la forme φ_A pour une unique matrice A. Introduisons

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_p(\mathbf{K})^* \\ A \mapsto \varphi_A \end{cases}.$$

Il s'agit de montrer que Φ est bijective. Comme elle est clairement linéaire entre deux espaces de même dimension p^2, il suffit de montrer qu'elle est injective.
Tout $A \in \ker\Phi$ est nul car $0 = \operatorname{tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$ pour toutes les matrices élémentaires.

19. pas de correction pour Emm19.tex
20. (Cmm20)
    a. Il est évident que I_2 et A commutent avec A donc $\operatorname{Vect}(I_2, A) \subset \ker\Phi$.
    b. Par le calcul :
    $$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(M) = (t-x)\Delta + yT_s + zT_i$$
    On en déduit $\operatorname{Im}\Phi \subset \operatorname{Vect}(\Delta, T_i, T_s)$.
    c. Si $A \notin \operatorname{Vect}(I_2)$ alors (A, I_2) libre et
    $$\operatorname{Vect}(I_2, A) \subset \ker\Phi \Rightarrow 2 \leq \dim(\ker\Phi) \Rightarrow \operatorname{rg}(\Phi) \leq 2$$
    On en déduit que la famille de trois vecteurs (Δ, T_i, T_s) est liée. On forme une relation linéaire en écrivant que $A \in \ker\Phi$:
    $$(d-a)\Delta + bT_s + cT_i = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbf{K})}$$
    avec
    $$(d-a, b, c) = (0,0,0) \Leftrightarrow A \in \operatorname{Vect}(I_2)$$
    d. Si $A \in \operatorname{Vect}(I_2)$ tout le monde commute avec A donc Φ est identiquement nulle.
    Si $A \notin \operatorname{Vect}(I_2)$, on a vu que $\operatorname{rg}(\Phi) \leq 2$ et
    $$(d-a, b, c) \neq (0,0,0)$$
    et
    $$\begin{aligned} d-a \neq 0 &\Rightarrow (T_s, T_i) \text{ libre} \\ b \neq 0 &\Rightarrow (\Delta, T_i) \text{ libre} \\ c \neq 0 &\Rightarrow (\Delta, T_s) \text{ libre} \end{aligned}$$
    Dans tous les cas le rang de la famille est supérieur ou égal à 2 donc le rang est 2. Supposons (I_2, A, B) liée.
    – Si (I_2, A) liée, tout le monde commute avec A, en particulier B.
    – Sinon $B \in \operatorname{Vect}(I_2, A)$ et il commute avec A.
    Supposons que B commute avec A.
    – Si (I_2, A) liée, alors (I_2, A, B) liée.
    – Sinon,
    $$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\Phi) = 2 &\Rightarrow \ker\Phi = \operatorname{Vect}(I_2, A) \\ &\Rightarrow B \in \operatorname{Vect}(I_2, A) \Rightarrow (I_2, A, B) \text{ liée} \end{aligned}$$
21. pas de correction pour Emm21.tex

Rémy Nicolai _fex_mmpdf du 5 avril 2020