1. (Emo01) Calculer le rang des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définies par $a_{ij} = \cos(i + j - 2)$, $b_{ij} = i + j + ij$.

2. (Emo02) En discutant selon les paramètres, calculer le rang des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$
Pour la deuxième matrice, on présentera le résultat dans le plan des a, b.

3. (Emo03) Étudier l'inversibilité et calculer l'inverse si possible pour les matrices suivantes :
   a. $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{*n}$
$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{bmatrix}$$
   b. $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$
$$\begin{pmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\alpha-\gamma & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{pmatrix}$$
   Considérer
$$U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = U\,{}^tV.$$
   Calculer T^2 et chercher la matrice inverse comme combinaison linéaire de T et I_3.

4. (Emo04) Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 & = 0 \end{cases}$$

5. (Emo05) Passage du paramétrique au cartésien.
Déterminer un système d'équations (indépendantes) du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$(1,0,1,0), (2,1,0,1), (0,1,-3,-2), (1,0,2,3)$$

6. (Emo06) Calculer les inverses des matrices complexes ou réelles par la méthode de Gauss (algorithme I'), vérifier à la machine
$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & j^2 & 1 \\ j & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. (Emo07) Décomposition LU.
Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$. On suppose que l'algorithme du pivot partiel (I) conduit à une matrice triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale *sans qu'il soit nécessaire de permuter les lignes*. (Voir l'exercice 25 sur cette condition.)
Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. Expliciter L et U pour
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. (Emo08) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, montrer que
$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A)$$
On pourra montrer que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) : {}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$$

9. (Emo09) On considère trois vecteurs dans $E = \mathbb{R}^3$:
$$u_1 = (1,-1,-1),\ u_2 = (2,-1,1),\ u_3 = (1,0,2)$$
La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ou liée ? Si elle est liée, former une relation linéaire entre ses vecteurs. Donner une définition cartésienne de $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

10. (Emo10) On considère des vecteurs a_m, b_m, c_m, d_m dans $E = \mathbb{R}^4$ qui dépendent d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$ et les sous-espaces vectoriels qu'ils engendrent.
$$\begin{aligned} a_m &= (m,1,0,m), & b_m &= (0,m,2m+2,0) \\ c_m &= (1,0,m,0), & d_m &= (2m,0,1,m) \\ V_m &= \operatorname{Vect}(a_m, b_m), & W_m &= \operatorname{Vect}(c_m, d_m) \end{aligned}$$
Discuter selon m de la dimension des sous-espaces vectoriels V_m, W_m, $V_m \cap W_m$ et en donner *dans chaque cas significatif* une base.

11. (Emo11) Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$ engendrent le même sous espace vectoriel que $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$.

12. (Emo12) Montrer qu'une matrice à p lignes et colonnes est de rang 1 si et seulement si elle est de la forme CL où C est une colonne et L une ligne (non nulles).

13. (Emo13) On définit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ par
$$a_{i,j} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}$$
Montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

14. (Emo14) *Familles de formes linéaires*
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension q muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_q)$, soit $\mathcal{B}^* = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$ la base de E^* constituée des fonctions coordonnées dans $\mathcal{B}$ (base duale).

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$. On note

$$A = \underset{\mathcal{B}}{Mat}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_p)$$

Il s'agit de la matrice d'une famille de formes linéaires dans une base de E.
On définit $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K}^p)$ par :

$$\phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_p(x))$$

a. Exprimer

$$\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}\,\phi, \qquad \underset{\mathcal{B}^*}{\mathrm{Mat}}(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$$

en fonction de A. Pour la deuxième, il s'agit de la matrice d'une famille de *vecteurs* de E^* dans une base de E^*.

b. Montrer que $\mathrm{rg}\phi = \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots \varphi_p)$. En déduire

$$\dim(\ker\varphi_1 \cap \cdots \cap \ker\varphi_p) = q - \mathrm{rg}(\varphi_1, \cdots \varphi_p)$$

c. Montrer que $(\varphi_1, \cdots \varphi_p)$ est libre si et seulement si ϕ est surjective. Lorsque ϕ est surjective, montrer l'existence d'une famille $(u_1, \cdots, u_p)$ de vecteurs de E tels que $\varphi_i(u_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre et que

$$\ker\varphi_1 \cap \cdots \cap \ker\varphi_p \oplus \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_p) = E$$

d. Soit $(\varphi_1, \cdots \varphi_p)$ libre et $\varphi \in E^*$ tel que

$$\ker\varphi_1 \cap \cdots \cap \ker\varphi_p \subset \ker\varphi$$

Montrer que

$$\varphi = \varphi(u_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(u_p)\varphi_p$$

En déduire que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \cdots \varphi_p)$.
Les nombres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tels que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_p\varphi_p$ sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange*.

e. Base antéduale.
Soit $(\varphi_1, \cdots \varphi_q)$ une base de E^*, montrer l'existence d'une base $(f_1, \cdots, f_q)$ de E telle que $(\varphi_1, \cdots \varphi_q)$ soit la base duale de $(f_1, \cdots, f_q)$.

15. (Emo15) Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$. On définit des formes linéaires α et β

$$\alpha((x,y,z,t)) = x + y + z + t$$
$$\beta((x,y,z,t)) = x - y + 2z - t$$

Former la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de la projection sur $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ parallelement à $\ker\alpha \cap \ker\beta$.

16. (Emo16) Dans $\mathbf{K}^4$, on considère les vecteurs

$$a = (1,2,3,4), \quad b = (2,2,2,6), \quad c = (0,2,4,4),$$
$$d = (1,0,-1,2), \quad e = (2,3,0,1)$$

On pose $U = \mathrm{Vect}(a,b,c)$ et $V = \mathrm{Vect}(d,e)$. Calculer les dimensions de U, V, $U \cap V$, $U + V$ et donner une base de chacun d'entre eux.

17. (Emo17) Diagonalisation.
En discutant du rang de $A - \lambda I_3$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

trouver les scalaires λ tels que $A - \lambda I_3$ soit non inversible. Pour ces valeurs, résoudre l'équation $AX = \lambda X$ où X est une colonne. Préciser une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

Même question avec

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

18. (Emo18) On considère une matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A et C sont des matrices carrées et 0 désigne une matrice nulle. Montrer que

$$\mathrm{rg}\,M \geq \mathrm{rg}\,A + \mathrm{rg}\,C$$

19. (Emo19) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $f_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image et le noyau de f_m par une base et des équations.

20. (Emo20) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible. On pourra utiliser (exercice mm18) que, pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice A telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}), \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

21. (Emo21) Soient A et C des matrices données, on cherche à calculer B vérifiant $B\,C = A$.

a. On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Soit k est un paramètre réel, on se donne

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Est-ce possible pour tout k ?

22. (Emo22) Soit $a \in \mathbb{R}$, en utilisant les trois méthodes proposées par le cours, calculer la matrice inverse de
$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. (Emo23) Former un système d'équations du sous-espace V de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$(7,4,-2,-1),\ (3,2,0,1),\ (5,2,4,7),\ (1,0,2,3)$$

24. (Emo24) On considère une matrice A à laquelle on adjoint une colonne de y_i
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 2 & y_1 \\ 2 & 5 & 12 & -7 & y_2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & y_3 \\ -2 & 4 & 6 & -2 & y_4 \end{pmatrix}.$$
En transformant cette matrice par la méthode du pivot partiel, préciser le rang de A, une base de $\operatorname{Im} A$ et des équations pour $\operatorname{Im} A$ et $\ker A$.

25. (Emo25) Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$. Les *matrices extraites principales* de A sont les matrices extraites $A_r = A_{[\![1,r]\!][\![1,r]\!]}$ pour $r \in [\![1,m]\!]$.
Montrer que A vérifie la condition assurant l'existence d'une décomposition LU (exercice 7) si et seulement si les matrices extraites principales sont inversibles.

26. (Emo26) Soit $n \geq 2$ naturel. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![2,n]\!]$, on pose
$$T_k(\lambda) = I_n + \lambda\, E_{k-1,k}(n).$$
Quel est l'effet de la multiplication à gauche par $T_k(\lambda)$?
Pour $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, préciser la matrice
$$T_1(\lambda_1) \cdots T_k(\lambda_k).$$
Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ v_{ij} = x_j^{i-1}.$$
À quoi ressemble la matrice V ? Préciser
$$T_1(-x_1) \cdots T_k(-x_k) V.$$

1. pas de correction pour Emo01.tex
2. pas de correction pour Emo02.tex
3. (Cmo03)
   a. On interprète la matrice donnée comme la matrice d'une famille de vecteurs $(c_1, \cdots, c_n)$ dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$. Inverser la matrice revient à exprimer les e_i en fonction des c_i. La colonne qui ne contient que des 1 joue un rôle particulier. Elle est associée au vecteur
   $$c = e_1 + \cdots + e_n$$
   On peut écrire
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ c_i = c + a_i e_i \Rightarrow e_i = \frac{1}{a_i} c_i - \frac{1}{a_i} c$$
   En sommant, on obtient
   $$c = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} c_i \right) - sc \text{ où } s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$
   – Si $s = -1$, alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} c_i = 0$. La famille des vecteurs c_i est liée, la matrice n'est pas inversible.
   – Si $c \neq -1$, alors c est une combinaison des c_i donc les e_j sont des combinaisons des ci. La famille $(c_1, \cdots, c_n)$ est génératrice, c'est une base, la matrice est inversible.

   Ce raisonnement permet de calculer la matrice inverse, notons $\alpha = 1 + s$:
   $$c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha a_i} c_i \Rightarrow e_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha a_i a_j} c_j + \frac{1}{a_i c_i}$$
   La matrice inverse cherchée s'écrit
   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} - \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n a_1} & \cdots & \frac{1}{a_n a_n} \end{pmatrix}$$
   b. Notons M la matrice à étudier. Calculons T^2 :
   $$\begin{aligned} {}^t\!VU &= \alpha + \beta + \gamma \text{ (matricette)} \\ &\Rightarrow T^2 = U \left({}^t\!VU\right) {}^t V = (\alpha + \beta + \gamma) T \end{aligned}$$
   La matrice à inverser s'écrit
   $$2T - (\alpha + \beta + \gamma) I_3$$
   Comme $\mathrm{rg}(T) = 1$, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la matrice M n'est pas inversible.
   En cherchant une matrice inverse combinaison de T et I_3, on montre que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, la matrice M est inversible et
   $$M^{-1} = \lambda T + \mu I_3 \quad \text{avec}$$
   $$\mu = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \lambda = -\frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$
4. pas de correction pour Emo04.tex
5. pas de correction pour Emo05.tex
6. (Cmo06) Après calculs, on trouve les matrices inverses suivantes
   $$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -i \\ 1+i & 1+i & 1-3i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 1 & -j \\ -j & -j^2 & 1 \\ 1 & -j^2 & -j^2 \end{pmatrix},$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   $$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 4 & -11 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$
7. (Cmo07) On suppose que l'algorithme du pivot partiel ne nécessite pas de permutations de lignes. Il procède donc de haut en bas. Pour chaque i entre 1 et p la ligne i permet de nettoyer la colonne i des lignes $i+1$ à p. Ces opérations se font avec des matrices élémentaires *triangulaires inférieures*.
   Il existe donc des matrices élémentaires triangulaires inférieures $P_1, \cdots, P_s$ telles que
   $$P_s \cdots P_1 A = U \Rightarrow A = LU$$
   avec U triangulaire supérieure et
   $$L = (P_s \cdots P_1)^{-1}$$
   triangulaire inférieure.
   Comment calculer L sans avoir à stocker les matrices élémentaires P_i ?
   En remarquant que
   $$L = I\, P_1^{-1} \cdots P_s^{-1}$$
   ce qui permet, à partir de I_p d'opérer sur les colonnes avec l'inverse de la matrice élémentaire.
   Pour l'exemple de
   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   présentons en parallèle les opérations codées
   $$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 & C_1 &\leftarrow C_1 + C_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_1 & C_1 &\leftarrow C_1 - \frac{4}{5} C_3 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{9}{20} L_2 & C_2 &\leftarrow C_2 - \frac{9}{20} C_3 \end{aligned}$$
   On obtient après calculs :
   $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$
8. (Cmo08) Commençons par montrer l'implication suggérée
   $$\begin{aligned} {}^t\!AAX = 0_{\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})} &\Rightarrow {}^t\!X\,{}^t\!AAX = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Rightarrow {}^t\!(AX)\, AX = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Rightarrow y_1^2 + \cdots + y_p^2 = 0 \text{ avec } AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$.
L'inclusion réciproque étant évidente, les noyaux sont égaux. On conclut en utilisant la version matricielle du théorème du rang : le rang d'une matrice est égale à son nombre de colonne mois la dimension de son noyau.

9. pas de correction pour Emo09.tex
10. (Cmo10) On effectue des calculs de rang de familles de vecteurs.
On trouve que, pour tout m, le rang de (a_m, b_m) est 2. On en déduit que pour tout m, $\dim(V_m) = 2$ et (a_m, b_m) base de V_m.
On trouve que, pour tout m, le rang de (c_m, d_m) est 2. On en déduit que pour tout m, $\dim(W_m) = 2$ et (c_m, d_m) base de W_m.
Le calcul du rang de la famille (a_m, b_m, c_m, d_m) est
– 4 si m n'est pas égal à 0 ou -1
– 3 si m est égal à 0 ou -1
Lorsque ce rang est 4, les vecteurs forment une base. Les sous-espaces V_n et W_n sont donc supplémentaires : $\dim(V_m \cap W_m) = 0$.
Lorsque ce rang est 4, la dimension de l'intersection est forcément 1. On forme les deux cas particuliers pour donner une base.
11. pas de correction pour Emo11.tex
12. pas de correction pour Emo12.tex
13. (Cmo13) La matrice est inversible car elle est triangulaire inférieure avec des termes non nuls sur la diagonale. Cela entraine que les colonnes forment une famille libre.
On note Y_i les colonnes de A et X_i les colonnes de I_n (base canonique des matrices colonnes). Il s'agit d'exprimer les X en fonction des Y. On tire de l'écriture des colonnes de A :
$$X_n = \frac{1}{n} Y_n$$
$$\begin{aligned}
Y_{n-1} &= (n-1)X_{n-1} + X_n \\
\Rightarrow X_{n-1} &= \frac{1}{n-1} Y_{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} Y_n \\
Y_{n-2} &= (n-2)X_{n-2} + X_{n-1} + X_n \\
\Rightarrow X_{n-2} &= \frac{1}{n-2} Y_{n-1} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} Y_{n-1} \\
&\qquad - \frac{1}{n(n-1)} Y_n
\end{aligned}$$
On en déduit que la matrice inverse est la matrice B telle que
$$b_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{j} \text{ si } i = j \\ -\dfrac{1}{i(i-1)} \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}$$
14. pas de correction pour Emo14.tex
15. pas de correction pour Emo15.tex
16. pas de correction pour Emo16.tex
17. (Cmo17) Système (1).
Si $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1, i, -i\}$, unique solution
$$\left(\frac{m(m^2+3)}{(m+1)(m^2+1)}, -\frac{m-1}{m^2+1}, \frac{2}{m+1} \right)$$
Si $m = 0$ une droite affine de solutions
$$(0, 1, z), \quad z \in \mathbb{C}$$
Si $m = 1$ une droite affine de solutions
$$(1, y, y+1), \quad y \in \mathbb{C}$$
Si $m \in \{-1, i, -i\}$, pas de solution.
Système (2).
Si $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$, unique solution
$$\left(\frac{m(2m-3)}{3(m-1)}, \frac{m+6}{6}, \frac{3m^2 - 6m + 1}{6(m-1)} \right)$$
Si $m = 0$ une droite affine de solutions
$$(0, 1, z), \quad z \in \mathbb{C}$$
Si $m = -1$ une droite affine de solutions
$$(x, -x, x), \quad z \in \mathbb{C}$$
Si $m = 1$, pas de solution.
18. pas de correction pour Emo18.tex
19. pas de correction pour Emo19.tex
20. (Cmo20) Il s'agit donc de montrer que, pour toute matrice A non nulle, il existe une matrice inversible M telle que $\operatorname{tr}(AM) = 0$.
Soit $r > 0$ le rang de la matrice non nulle A. Il existe des matrices inversibles P et Q, produit de matrices élémentaires telles que
$$A = Q\, J_r\, P.$$
Comme la trace se conserve par permutation,
$$\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}\left(J_r(P\, M\, Q)\right)$$
Il suffit donc de trouver une matrice inversible S telle que $\operatorname{tr}(J_r\, S) = 0$.
Si $r \geq 2$, on peut trouver S diagonale. Si $r = 1$, on prend une matrice diagonale par bloc avec
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
en haut à gauche et I_{p-2} en bas à droite.
21. (Cmo21)
   a. Dans ce cas, C est de rang 3 donc inversible. Après calcul de l'inverse,
$$B = AC^{-1} = A \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   b. Cette fois $\operatorname{rg} C = 2$ donc C n'est pas inversible. Soit a, b, c les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont A, B, C.
$$BC = A \Leftrightarrow b \circ c = a \Rightarrow \ker c \subset \ker a$$

On doit donc avoir k tel que $\ker c \subset \ker a$. De plus

$$(x,y,z) \in \ker c \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -5x + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z) = \frac{z}{5}(3,1,5)$$

On doit donc avoir

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -3$$

Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $u = (3,1,5)$ le vecteur générateur du noyau. Alors $\mathcal{U} = (c(e_1), c(e_2), u)$ est une base et l'application b *définie* par

$$b(c(e_1)) = a(e_1),\ b(c(e_2)) = a(e_2),\ b(u) = 0$$

vérifie bien $b \circ c = a$. Ceci se traduit par

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{UC}} b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On en tire

$$B = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} b = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{UC}} b \operatorname*{Mat}_{\mathcal{CU}} \operatorname*{Id}_{E} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{UC}} b\, P_{\mathcal{CU}}^{-1}$$

Après calculs ;

$$P_{\mathcal{CU}}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 11 & 12 & -9 \\ 13 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Il n'y a plusieurs B solutions.

22. pas de correction pour Emo22.tex
23. (Cmo23) En formant un système de 4 équations à 4 inconnue et en éliminant les inconnues dans ce système, on trouve
$$(a,b,c,d) \in V \Leftrightarrow b + 3c - 2d = 0$$
24. pas de correction pour Emo24.tex
25. pas de correction pour Emo25.tex
26. pas de correction pour Emo26.tex