1. (Epb01) Une urne contient quatre jetons identiques marqués 1, 2, 3, 4. On en tire deux que l'on place dans une nouvelle urne à laquelle on ajoute un jeton marqué 5. On tire un jeton de cette nouvelle urne. Quelle est la probabilité qu'il soit pair ?
2. (Epb02) Mon ami Paul travaille dans un cercle de jeux. Il m'en a expliqué un. Trois boîtes sont alignées sur la table, une seule contient un jeton, les deux autres sont vides. Paul sait dans quelle boîte se trouve le jeton. Le client a deux possibilités
   S1 : il choisit une boîte en disant « C'est mon dernier choix ».
   S2 : il désigne une boîte, Paul élimine une boîte vide parmi les deux non désignées et le client choisit une des deux qui restent.
   Le client gagne s'il choisit la boîte contenant le jeton. Quelle est la meilleure stratégie ?
3. (Epb03) Le vieil homme changeait souvent la serrure de sa porte blindée mais ne supportait pas de jeter les anciennes clés. Il en avait n qu'il n'arrivait plus à distinguer. Pour sortir de chez lui il devait les essayer toutes, une par une, en maugréant.
   Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au k-ième essai ?
4. (Epb04) Lequel des trois événements suivants a la plus grande probabilité :
   - obtenir au moins un 6 en lançant six dés
   - obtenir au moins deux 6 en lançant douze dés
   - obtenir au moins trois 6 en lançant dix huit dés.
5. (Epb05) Fonctions caractéristiques et formule de Poincaré.
   Soit Ω un ensemble quelconque fixé. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies dans Ω et à valeurs dans $\{0,1\}$. C'est une partie de l'espace noté $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ des fonctions définies dans Ω et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La somme et le produit (fonctionnels) sont bien définis dans $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ et lui confèrent une structure d'anneau. Le neutre multiplicatif est la fonction (notée U) constante de valeur 1.
   On associe à chaque partie A de Ω une fonction notée φ_A définie dans Ω qui prend les valeurs 0 ou 1 :
$$\Omega \to \{0,1\}$$
$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$
   Cette fonction est appelée la fonction *caractéristique* de la partie A.
   a. Montrer, pour toutes parties A et B de Ω, les égalités (entre fonctions) suivantes
$$\varphi_{\overline{A}} = U - \varphi_A, \qquad \varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B$$
   b. Comment s'exprime $\varphi_{A\cup B}$?
   Dans la suite de l'exercice, $A_1, \cdots, A_n$ est une famille de parties de Ω. Pour toute partie I de $\{1,\cdots,n\}$, on définit A_I par :
$$A_I = \cap_{i\in I} A_i$$
   Exprimer $\varphi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}$ avec des φ_{A_I} (on regroupera les parties I de $\{1,\cdots,n\}$ qui ont le même nombre d'éléments).
   c. Dans la suite de l'exercice, l'ensemble Ω est *fini*. On considère une fonction C définie dans $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par
$$C(f) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)$$
   Que valent $C(\lambda f)$ et $C(f+g)$?
   Montrer les formules de Poincaré
$$\sharp(A_1\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \text{ tq } \sharp I = k} \sharp(A_I)$$
$$\mathbb{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \text{ tq } \sharp I = k} \mathbb{P}(A_I)$$
   pour une probabilité quelconque sur l'univers Ω.
6. (Epb06) X et Y jouent à pile ou face. Lorsque pile sort, X marque un point. Lorsque face sort, Y marque un point. Le premier qui a trois points a gagné. On modélisera avec un réseau de points à coordonnées entières en partant de $(0,0)$ en ajoutant 1 à la première ou à la deuxième composante suivant que X ou Y marque un point.
   Quelle est la probabilité que X gagne sachant qu'il a marqué 2 points et Y 1 point. Quelle est la probabilité que Y gagne sur le score de 1 à 3 ?
7. (Epb07) Pour deux séries indépendantes de n lancers de pile ou face, quelle est la probabilité que les nombres de fois ou face est sorti soient égaux ?
   Simplifier en considérant de deux manières le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$.
8. (Epb08) On procède à des tirages sans remise dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires. On note $p_k(b,n)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au k-ème tirage.
   Calculer $p_1(b,n)$, $p_2(b,n)$. Former une relation entre $p_k(b,n)$, $p_{k-1}(b-1,n)$, $p_{k-1}(b,n-1)$. En déduire $p_3(b,n)$ puis conclure par récurrence pour $k \leq b+n$.
9. (Epb09) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en deux lancers ?
10. (Epb10) On lance un dé n fois au plus en s'arrêtant dès que l'on obtient un 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
11. (Epb11) On lance n fois une pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois deux piles ou deux faces consécutifs ? Et pour un dé, avec deux valeurs égales consécutives ?
12. (Epb12) Coïncidences.
    Cet exercice utilise la formule de Poincaré (exercice 5). On dispose de n boules numérotées de 1 à n placées dans n tiroirs numérotés de 1 à n. Chaque tiroir ne contient qu'une boule, quelle est la probabilité qu'une coïncidence se produise.
13. (Epb13) Paul distribue des cartes d'un jeu de 52.
    a. Quelle est la probabilité qu'une main de 5 cartes contienne 3 carreaux ? au moins une paire ?
    b. Dans un silence tendu, Paul distribue toutes les cartes aux 4 joueurs. Quelle est la probabilité que chacun ait un as ?

14. (Epb14) On lance 6 fois un dé, quelle est la probabilité d'obtenir toutes les valeurs ?

15. (Epb15) Une question d'un QCM propose m réponses dont une seule est correcte. La stratégie des candidats est la suivante : si un candidat connait la réponse, il la coche sinon il en choisit une au hasard. La probabilité qu'un candidat connaisse la réponse est p.
Quelle est la probabilité qu'un candidat connaisse la bonne réponse sachant qu'il a répondu correctement ?

16. (Epb16) Soit $\overline{X}$ l'événement contraire à X et A, B deux événement indépendants d'un espace probabilisé. Montrer que les couples d'événements $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$, $\overline{A}, \overline{B})$ sont indépendants.

17. (Epb17) Le problème avec ce Réparateur, c'est qu'il dit la même chose à tout le monde :

« Oui oui. Demain je viens et c'est réglé ! »

Effectivement, quand il vient, il répare toujours ! Mais il ne vient pas forcément (seulement avec la probabilité v). Même s'il n'est pas venu, il vous dira la même chose quand vous le rappelerez.
Le problème chez Antoine, c'est la Douche du premier étage. Il la vérifie tous les jours ! Qu'elle fonctionne un jour n'assure pas qu'elle fonctionnera le lendemain (seulement avec la probabilité f). Quand ça ne marche pas, Antoine appelle paisiblement le Réparateur le jour même.
Aujourd'hui tout va bien ; mais dans un mois, son cousin descend de la montagne pour passer quelques jours chez lui. Quelle est la probabilité que la Douche fonctionne ? Ce serait bien si, à long terme, la probabilité de fonctionner était supérieure à 0.9. Comment représenter graphiquement cette configuration d'un avenir satisfaisant.

18. (Epb18) Dans un espace probabilisé, on considère deux événements A et B. On note

$$x = \mathbb{P}(A \cap B), y = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}), a = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}),$$
$$b = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Exprimer y en fonction de a, b, x puis

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

en fonction de x, y, a, b. En déduire que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

19. (Epb19) Trois urnes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$ contiennent chacune 2 boules noires et 3 blanches. On tire une boule de $\mathcal{U}_1$ et une de $\mathcal{U}_2$ et on les place dans $\mathcal{U}_3$. Quelles sont les probabilités de tirer 3 boules noires, de tirer une boule blanche de $\mathcal{U}_3$?
Sachant que l'on a tiré une boule blanche de $\mathcal{U}_3$, quelle est la probabilité d'avoir tiré des boules blanches de $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$?

20. (Epb20) Antoine a cinq paires de chaussures qui se ressemblent beaucoup. Le matin il les prend une par une, comme elles viennent. Du même pied, il ne supporte pas. Mais de deux paires différentes, il s'en rend à peine compte. Quelle est la probabilité qu'il parte travailler avec une vraie paire sachant qu'il en a tiré 3 ?

21. (Epb21) Soit A, B, C des événements. Exprimer avec $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ les probabilités de :
– exactement deux des événements se réalisent.
– exactement un de ces événements se réalise.
– aucun de ces événements ne se réalise.
– seulement A se réalise.
– A et B se réalisent mais pas C.
– les trois se réalisent
– au moins un se réalise
– au moins deux se réalisent.

22. (Epb22) Antoine peint un cube en bois, puis il le scie calmement en mille petits cubes égaux. Quand il les mélange et en tire un au hasard, qu'elle est la probabilité qu'il ait exactement deux faces peintes ?

23. (Epb23) Une rumeur se propage d'une personne à une autre dans un groupe de n personnes. Après k étapes, quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas revenue à celui qui l'a lancée.

24. (Epb24) On considère deux urnes. La première contient a boules de couleur aubergine et b boules blanches. La deuxième contient c boules de couleur carotte et d boules de la couleur des dromadaires. L'expérience consiste à tirer une boule de chaque urne puis une au hasard entre les deux tirées. Quelle est la probabilité qu'elle soit de couleur aubergine ?

25. (Epb25) Une loterie comprend n tickets dont m gagnants. Quelle est la probabilité de tirer un ticket gagnant si on est le k-ième acheteur ?

26. (Epb26) On considère deux expériences de Bernouilli B_a de paramètre a et B_b de paramètre b. On réalise successivement ces expériences en commençant par B_a. Quelle est la probabilité que la première réussite soit produite par l'expérience B_a.

27. (Epb27) On considère deux types d'avion : un gros avec 4 moteurs et un petit avec deux seulement. Pour voler, le gros doit avoir au moins trois moteurs en état de marcher et le petit un seul. Tous les moteurs ont la même probabilité p de fonctionner qui est indépendante de l'avion et du fonctionnement des autres moteurs. Calculer, pour chaque type d'avion la probabilité de pouvoir voler et comparer ces probabilités.

28. (Epb28) On tire deux nombres au hasard (sans remise) entre 1 et 100. Quelle est la probabilité que le plus petit des deux soit supérieur ou égal à 20 sachant que le plus grand est inférieur ou égal à 60 ?

1. (Cpb01) Comme il s'agit d'une expérience composée, on la modélise à l'aide de chemins sur un graphe (figure 1). La probabilité cherchée est

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times 0=\frac{1}{3}.$$

On peut aussi présenter le raisonnement avec un système complet d'évènements constitué à partir du résultat du premier tirage et la formule des probabilités totales.

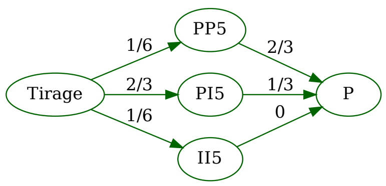

FIG. 1 – Exercice 1

2. pas de correction pour Epb02.tex
3. pas de correction pour Epb03.tex
4. pas de correction pour Epb04.tex
5. pas de correction pour Epb05.tex
6. pas de correction pour Epb06.tex
7. pas de correction pour Epb07.tex
8. pas de correction pour Epb08.tex
9. pas de correction pour Epb09.tex
10. pas de correction pour Epb10.tex
11. pas de correction pour Epb11.tex
12. pas de correction pour Epb12.tex
13. pas de correction pour Epb13.tex
14. pas de correction pour Epb14.tex
15. pas de correction pour Epb15.tex
16. pas de correction pour Epb16.tex
17. pas de correction pour Epb17.tex
18. pas de correction pour Epb18.tex
19. pas de correction pour Epb19.tex
20. pas de correction pour Epb20.tex
21. pas de correction pour Epb21.tex
22. pas de correction pour Epb22.tex
23. pas de correction pour Epb23.tex
24. pas de correction pour Epb24.tex
25. pas de correction pour Epb25.tex
26. pas de correction pour Epb26.tex
27. pas de correction pour Epb27.tex
28. pas de correction pour Epb28.tex