1. (Epo01) Montrer que, pour tout naturel n non nul,
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(1-X)^{3n-2k}X^k=(1-X^3)^n$$

2. (Epo02) On convient de poser $\binom{u}{v}=0$ lorsque $v\notin\{0,\ldots,u\}$. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{p}{i}\binom{p}{k-i}=\begin{cases}0 & \text{si } k \text{ impair}\\ (-1)^{\frac{k}{2}}\binom{p}{\frac{k}{2}} & \text{si } k \text{ pair}\end{cases}$$

3. (Epo03) Montrer que H divise H_n et former le quotient :
$$H=X^2-2\operatorname{ch}a\,X+1$$
$$H_n=\operatorname{sh}(na)X^{n+1}-\operatorname{sh}((n+1)a)X^n+\operatorname{sh}a$$
Même question avec
$$C=X^2-2\cos a\,X+1$$
$$C_n=\sin(a)X^n-\sin(na)X+\sin((n-1)a)$$
Même question avec
$$P=X^2-3X+2\qquad P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1.$$

4. (Epo04) Calculs polynomiaux.
   a. Montrer que
$$(X^3+X^2+X+1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kX^k=X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1.$$
   b. Développer $\prod_{k=0}^{n}\left(1+X^{(2^k)}\right)$ par récurrence.
   c. Factoriser (par récurrence)
$$1+X+\frac{1}{2!}X(X+1)+\cdots+\frac{1}{n!}X(X+1)\cdots(X+n-1)$$
   Préciser les racines de
$$1-X+\frac{1}{2!}X(X-1)+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

5. (Epo05) Trouver tous les polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

6. (Epo06) Factoriser $X^8-2X^4\cos 2\alpha+1$ en produits de polynômes réels de degré 1 ou 2.

7. (Epo07) Calculer toutes les expressions symétriques (polynomiales) de
$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$
jusqu'au degré 4 en fonction de
$$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$$

8. (Epo08) Calculer la somme des carrés des racines de
$$X^3+2X^2+3X+4$$
Même question mais avec la somme des puissances 7 ièmes.

9. (Epo09) Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On dira qu'une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients complexes vérifie $E(u)$ si et seulement si :
$$Q_0=1,\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*:\begin{cases}\widetilde{Q_n}(0)=u_n\\ Q_n'=\widehat{Q_{n-1}}(X+1)\end{cases}$$
   a. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes vérifiant $E(u)$.
   b. Soit ε la suite nulle : $\varepsilon_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec
$$P_0=1,\qquad \forall n\in\mathbb{N}^*:\ P_n=\frac{1}{n!}X(X+n)^{n-1}$$
   vérifie $E(\varepsilon)$.
   c. Soit $a\in\mathbb{C}$ et $\alpha=\left(\widetilde{P_n}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Montrer que $\left(\widehat{P_n}(X+a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $E(\alpha)$.
   d. Soit $y\in\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une suite u à déterminer telle que
$$\left(\sum_{i=0}^{n}\widetilde{P_{n-i}}(y)P_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
   vérifie $E(u)$. En déduire que :
$$\widetilde{P_n}(x+y)=\sum_{i=0}^{n}\widetilde{P_i}(x)\widetilde{P_{n-i}}(y)$$
   pour tous x,y complexes et n naturel.

10. (Epo10) Etant donné $p\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$\binom{X}{0}=1\text{ et }\binom{X}{p}=\frac{1}{p!}X(X-1)\cdots(X-p+1)$$
On définit une application Δ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}[X]$ par
$$\forall P\in\mathbf{K}[X],\ \Delta(P)=\widehat{P}(X+1)-P$$
   a. Montrer que la fonction polynômiale associée à $\binom{X}{p}$ ne prend sur $\mathbb{Z}$ que des valeurs entières.
   b. Montrer que $\deg(\Delta(P))=\deg(P)-1$. Préciser le coefficient dominant de $\Delta(P)$. Calculer $\Delta\binom{X}{p}$.
   c. Exprimer $\Delta^n(P)=\underbrace{\Delta\circ\cdots\circ\Delta}_{n\text{ fois}}(P)$ en vous inspirant de la formule du binôme.
   d. Soit P de degré au plus $n-1$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\widetilde{P}(k)=0$$
   e. Soit P de degré n. Exprimer P en fonction des $\Delta^k(P)$ et des $\binom{X}{p}$ en vous inspirant de la formule de Taylor.
   Déterminer tous les polynômes à coefficients réels tels que les fonctions associées ne prennent sur $\mathbb{Z}$ que des valeurs entières.

Rémy Nicolai _fex_popdf du 21 décembre 2018

11. (Epo11) En utilisant les racines de $(X+1)^n - e^{2in\alpha}$, calculer
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n} + \alpha)$$

12. (Epo12) Déterminer tous les polynômes à coefficients complexes tels que
$$\widehat{P}(X^2) = P.\widehat{P}(X-1)$$
On pourra commencer par montrer qu'une racine non nulle de P est nécessairement de module 1.

13. (Epo13) Soit m, n, p trois entiers naturels. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise
$$X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$$

14. (Epo14) Factoriser les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:
$$(1 - X^2)^3 + 8X^3$$
$$X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$
$$1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^{2n} X^{2n}$$

15. (Epo15) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 4. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
– Les points dont les affixes sont les racines de P forment un parallélogramme.
– P' et $P^{(3)}$ ont une racine en commun.

16. (Epo16) Pour chaque sytème, former le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines x, y, z vérifient
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

17. (Epo17) Comment choisir les nombres complexes s et p pour que les deux racines de $X^2 - sX + p$ aient le même argument ?

18. (Epo18) Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que
$$\sin 9\theta = \cos^8 \theta \sin \theta \, \widetilde{P}(\tan^2 \theta)$$
pour tous les réels $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}$ modulo π. En déduire que
$$\tan 20^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 80^\circ = 3$$

19. (Epo19)
   a. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et α, β deux éléments distincts de K. Calculer le reste de la division de P par
   $$(X - \alpha)(X - \beta)$$
   à l'aide de $\widetilde{P}(\alpha)$ et $\widetilde{P}(\beta)$.
   b. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels et
   $$P = \prod_{k=1}^{n} (X \sin a_k + \cos a_k)$$
   Quel est le reste de la division de P par $X^2 + 1$?

20. (Epo20) Pour k entier entre 0 et $n-1$ et $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ montrer
$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 - 2z_k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos n\theta)$$

21. (Epo21) Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}[X] \\ P \to P + P' + \cdots + P^{(n)} \end{cases}$$
avec $n = \deg(P)$ est bijective.

22. (Epo22) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Q}[X]$ à déterminer tel que
$$P_n - P_n' = X^n$$

23. (Epo23) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $a \in \mathbf{K}$. On définit Q et R par :
$$Q = P - \widetilde{P}(a) - \frac{1}{2}(X - a)(P' + \widetilde{P'}(a))$$
$$R = P - \widetilde{P}(a) - \frac{1}{6}(X - a)(P' + \widetilde{P'}(a) + 4\widehat{P'}(\frac{1}{2}(X + a)))$$
Calculer la multiplicité de a comme racine de Q et R

24. (Epo24) Montrer que , dans $\mathbb{R}[X]$,
$$P^2 - XQ^2 = XR^2 \Rightarrow P = Q = R = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

25. (Epo25) Quel est le quotient dans la division d'un polynôme P par $(X - a)^2$? Calculer le quotient de
$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$$
dans la division par $(X - 1)^2$?

26. (Epo26) Dans chaque cas, déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que
$$\widehat{P}(X^2) = (X^2 + 1)P$$
$$X(X + 1)P'' + (X + 2)P' - P = 0$$
$$\widehat{P}(2X) = P'P''$$
(chercher les degrés possibles et utiliser des coefficients indéterminés)

27. (Epo27) En utilisant
$$X^2 + aX + b^2 = (X + b)^2 + (a - 2b)X$$
Factorisez en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
$$X^4 + 1, \quad X^6 + 1, \quad X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1,$$
$$X^6 + 3X^4 + 5X^2 + 6, \quad X^8 - 2X^4 \cos(2\alpha) + 1$$

28. (Epo28) Polynômes de Bernstein.
Dans cet exercice, il sera utile de transformer $k\binom{n}{k}$. Soit $n \geq 2$ entier et $\alpha \in \mathbb{C}$.
Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - \alpha\right)^2 \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = (X - \alpha)^2 + \frac{1}{n} X(1 - X)$$

29. (Epo29) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$, montrer que $P^n - X^n$ est divisible par $P - X$. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$, montrer que $\widehat{A}(A) - A$ est divisible par $A - X$.
30. (Epo30) Montrer que
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$
31. (Epo31) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \widetilde{P}(a) > 0$$
Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$P = A^2 + B^2$$
32. (Epo32) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur λ et μ pour que
$$X^2 + 1 \text{ divise } X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$$
33. (Epo33) Division suivant les puissances croissantes.
La *valuation* d'un polynôme (notée $\mathrm{val}(P)$) est le plus grand des entiers k tels que X^k divise P. On convient que le polynôme nul est de valuation $-\infty$ conventionellement inférieure à toutes les autres.
    a. Montrer que $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$ et que $\mathrm{val}(P+Q) \geq \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
    b. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ non nul de valuation nulle. Montrer que pour tout $B \in \mathbf{K}[X]$ de valuation nulle et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (Q_n, R_n) dans $\mathbf{K}[X]$ tels que
$$B = Q_n A + R_n \text{ avec } \mathrm{val}(R_n) > n$$
    c. Exemple Diviser $B = 1 + X + X^2$ par $A = 1 - X^3$ suivant les puissances croissantes avec $n = 4$.
34. (Epo34) Soit P et A dans $\mathbb{R}[X]$ et B dans $\mathbb{C}[X]$ tous non nuls tels que $P = AB$. Montrer que B est à coefficients réels.
35. (Epo35) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 1$. Pour k entier entre 0 et n, on note S_k la somme des racines de $P^{(k)}$. Exprimer les S_k en fonction de k, n, S_0.
36. (Epo36) Quels sont les polynômes unitaires de degré 3 dans $\mathbb{C}[X]$ dont les trois racines x, y, z vérifient
$$x + y + z = 1, \qquad xyz = 1$$
et si on impose en plus que les trois racines soient de module 1 ? Déterminer les triplets de nombres complexes x, y, z de module 1 tels que
$$x + y + z = 1 \qquad xyz = 1$$
37. (Epo37) Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels admettant n racines réelles et a un réel non nul. Montrer que $aP + P'$ admet n racines réelles distinctes.
38. (Epo38) Soit P un polynôme divisible par sa dérivée seconde P'' et a une racine multiple de P''. Montrer que a est une racine de P de multiplicité au moins 4.
39. (Epo39) Déterminer les entiers naturels $n \geq 2$ tels que
$$P_n = (X-1)^n - X^n + 1$$
ait une racine double.

1. pas de correction pour Epo01.tex
2. pas de correction pour Epo02.tex
3. pas de correction pour Epo03.tex
4. pas de correction pour Epo04.tex
5. (Cpo05) On suppose que P' divise P. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = P'Q$. Par définition de la dérivée, le degré de Q est 1.
Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité α. Il existe donc $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$P = (X-a)^\alpha P_1 \text{ avec } \widetilde{P_1}(a) \neq 0$$
On dérive :
$$P' = \alpha(X-a)^{\alpha-1}P_1 + (X-a)^\alpha P_1'$$
puis on multiplie par Q pour reformer P
$$(X-a)^\alpha P_1 = (X-a)^{\alpha-1}\left(\alpha P_1 + (X-a)P_1'\right)Q$$
On simplifie par $(X-a)^{\alpha-1}$ puis on substitue a à X. On en déduit
$$(*) \quad (X-a)P_1 = \left(\alpha P_1 + (X-a)P_1'\right)Q \Rightarrow \alpha\widetilde{P_1}(a)\widetilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow \widetilde{Q}(a) = 0$$
Donc a est racine de Q. Comme $\deg(Q) = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q = \lambda(X-a)$. L'examen du coefficient dominant dans la relation $P = P'Q$ montre que $\lambda = \frac{1}{n}$ où $n = \deg(P)$. On remplace dans $(*)$ et on simplifie encore. On en tire
$$P_1 = \left(\alpha P_1 + (X-a)P_1'\right)\lambda$$
En substituant encore a à X, on obtient $\alpha\lambda = 1$ soit $m = \deg(P)$. Les polynômes divisibles par leur dérivée sont donc ceux de la forme
$$c(X-a)^n$$
6. (Cpo06) On utilise l'identité remarquable
$$X^2 - 2X\cos\alpha + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}).$$
en substituant X^4 à X.
$$X^8 - 2X^4\cos\alpha + 1 = (X^4 - e^{i\alpha})(X^4 - e^{-i\alpha})$$
On factorise avec les racines 4-ièmes de $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
$$\begin{aligned} X^8 - 2X^4\cos\alpha + 1 = &\\ (X - e^{i\frac{\alpha}{4}})(X + e^{i\frac{\alpha}{4}})(X - ie^{i\frac{\alpha}{4}})(X + ie^{i\frac{\alpha}{4}})&\\ (X - e^{-i\frac{\alpha}{4}})(X + e^{-i\frac{\alpha}{4}})(X - ie^{-i\frac{\alpha}{4}})(X + ie^{-i\frac{\alpha}{4}})& \end{aligned}$$
En regroupant les facteurs conjugués, l'expression factorisée est
$$(X^2 - 2X\cos\frac{\alpha}{4} + 1)(X^2 + 2X\cos\frac{\alpha}{4} + 1)(X^2 - 2X\sin\frac{\alpha}{4} + 1)(X^2 + 2X\sin\frac{\alpha}{4} + 1)$$
car
$$\operatorname{Re}(ie^{i\frac{\alpha}{4}}) = -\sin\frac{\alpha}{4}.$$
7. pas de correction pour Epo07.tex
8. pas de correction pour Epo08.tex
9. pas de correction pour Epo09.tex
10. pas de correction pour Epo10.tex
11. pas de correction pour Epo11.tex
12. pas de correction pour Epo12.tex
13. (Cpo13) Il est évident que j et j^2 sont racines.
14. pas de correction pour Epo14.tex
15. pas de correction pour Epo15.tex
16. (Cpo16) On trouve les triplets $(1, 2, -2)$ à permutation près.
17. (Cpo17) Si $p = 0$ une des racines est nulle et n'a pas d'argument. On suppose donc $p \neq 0$.
Les racines z et z' ont le même argument lorsque leurs quotients sont réels et strictement positifs. Formons le polynôme unitaire P dont les racines sont $\frac{z}{z'}$ et $\frac{z'}{z}$.
$$\begin{aligned} &\frac{z}{z'}\frac{z'}{z} = 1\\ &\frac{z}{z'} + \frac{z'}{z} = \frac{z^2 + z'^2}{zz'} = \frac{s^2 - 2p}{p} = \frac{s^2}{p} - 2 \end{aligned}$$
On en déduit
$$P = X^2 - uX + 1$$
On doit donc caractériser la propriété pour P d'avoir deux racines réelles strictement positives. Cela se produit si et seulement si le discriminant est positif ou nul et la somme des racines strictement positive. Cela revient à u réel et > 2. En revenant aux notations de l'énoncé, la condition cherchée est
$$\frac{s^2}{p} \in \mathbb{R} \text{ et } \frac{s^2}{p} > 4$$
18. (Cpo18) Pour simplifier l'écriture, on notera c, s, t au lieu de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$. On écrit que $\sin 9\theta$ est la partie imaginaire de $(c + is)^9$ développé avec la formule du binôme. Seules les puissances impaires de is contribuent à cette partie imaginaire, les coefficients présentent une alternance de $+$ et de $-$. En mettant en facteur $c^8 s$, on obtient
$$\begin{aligned} \sin 9\theta = c^8 s(\binom{9}{1} - \binom{9}{3}t^2 + \binom{9}{5}t^4 &\\ - \binom{9}{7}t^6 + \binom{9}{9}t^8) = c^8 s\widetilde{P}(t^2)& \end{aligned}$$
avec
$$P = 9 - \binom{9}{3}X^2 + \binom{9}{5}X^2 - \binom{9}{7}X^3 + X^4$$
Les racines de P sont les $\tan^2\theta$ non nuls pour les θ annulant $\sin 9\theta$.
$$\begin{aligned} \sin 9\theta = 0 \Rightarrow \theta \equiv 0 \mod \frac{\pi}{9} &\\ \Rightarrow \tan\theta \in \left\{\tan\frac{k\pi}{9}, k = 1, \cdots, 8\right\}&\\ \Rightarrow \tan^2\theta \in \left\{\tan\frac{k\pi}{9}, k = 1, \cdots, 4\right\}& \end{aligned}$$

car ils sont deux à deux opposés. Les carrés des quatre tangentes exprimées en degré de l'énoncé sont donc les racines de P. Leur produit est 9 d'après l'expression de P. On en déduit la relation demandée car elles sont positives.

19. (Cpo19)
   a. Comme le reste est de degré inférieur ou égal à 1, il est de la forme
   $$R = uX + v$$
   avec u et v dans K. En substituant α et β à X, on obtient un système de deux équations aux inconnues α et β
   $$\begin{cases} u\alpha + v = \tilde{P}(\alpha) \\ u\beta + v = \tilde{P}(\beta) \end{cases}$$
   que l'on résoud avec les formules de Cramer
   $$u = \frac{\tilde{P}(\alpha) - \tilde{P}(\beta)}{\alpha - \beta}, \qquad v = \frac{\alpha\tilde{P}(\beta) - \beta\tilde{P}(\alpha)}{\alpha - \beta}$$
   b. Comme $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, on peut appliquer la première question avec $\alpha = i$ et $\beta = -i$. Comme P est à coefficients réels, on peut remarquer que $\tilde{P}(\beta) = \overline{\tilde{P}(\alpha)}$. On en déduit que u est la partie imaginaire de $\tilde{P}(i)$ et v sa partie réelle. En introduisant la fonction exponentielle, on obtient finalement que le reste demandé est
   $$X \sin S + \cos S \text{ avec } S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
20. pas de correction pour Epo20.tex
21. pas de correction pour Epo21.tex
22. (Cpo22) En formant un système avec des coefficients indéterminé, on trouve que l'unique polynôme est
   $$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$$
23. pas de correction pour Epo23.tex
24. pas de correction pour Epo24.tex
25. pas de correction pour Epo25.tex
26. (Cpo26) Si P n'est pas nul, en examinant les termes de plus haut degré, on trouve une condition nécessaire sur le degré. On cherche ensuite l'ensemble des solutions à l'aide de coefficients indéterminés et d'un système. On trouve
   – Degré 2, solutions $\lambda(X^2 - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
   – Degré 1, solutions $\lambda(X + 2)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
   – Degré 3, une seule solution : $\frac{4}{9}X^3$.
27. (Cpo27) On trouve :
   $$(X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$$
   $$(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$$
   $$(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$
   $$(X^2 + 2)(X^2 + \sqrt{2\sqrt{3} - 1}X + \sqrt{3})$$
   $$(X^2 - \sqrt{2\sqrt{3} - 1}X + \sqrt{3})$$
   $$(X^2 - 2\cos\frac{\alpha}{2}X + 1)(X^2 + 2\cos\frac{\alpha}{2}X + 1)$$
   $$(X^2 - 2\sin\frac{\alpha}{2}X + 1)(X^2 + 2\sin\frac{\alpha}{2}X + 1)$$
28. (Cpo29) On utilise l'identité remarquable géométrique :
   $$P^n - X^n = (P - X)\underbrace{(P^{n-1} + P^{n-2}X + \cdots + X^{n-1})}_{=P_n}.$$
   Si $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, alors
   $$\begin{aligned}\widehat{A}(A) - A &= a_1(A - X) + a_2(A^2 - X^2) + \cdots a_p(A^p - X^p) \\ &= (A - X)\,(a_1 + a_2A_n + \cdots + a_pA_p)\,.\end{aligned}$$
29. (Cpo30) Identifier les coefficients dans l'égalité
   $$(1 - X)^{2n}(1 + X)^{2n} = (1 - X^2)^{2n}$$
30. (Cpo31) Si un polynôme réel de degré n est à valeurs réelles strictement positives, il s'exprime comme un produit de polynômes du second degré sans racine réelles
   $$X^2 - 2\operatorname{Re} zX + |z|^2 = (X - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$$
   Chacun de ces polynômes est donc une somme de deux carrés. Or le produit de deux polynômes sommes de 2 carrés est lui même une somme de deux carrés à cause de l'identité
   $$(A^2 + B^2)(U^2 + V^2) = (AU - BV)^2 + (AV + BU)^2$$
   On remarque l'analogie avec le carré du module du produit de deux nombres complexes.
31. pas de correction pour Epo28.tex
32. (Cpo32) Le polynôme $X^2 + 1$ divise le polynôme donné si et seulement si i et $-i$ sont racines. Cela donne
   $$\begin{cases} \lambda - i\mu = 3 - i \\ \lambda + i\mu = 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$
   Le polynôme se factorise en
   $$X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$$
33. (Cpo33)
   a. Formules faciles en considérant le coefficient du terme de plus bas degré.
   b. Pour l'unicité, on raisonne comme pour la division euclidienne en faisant jouer à la valuation le rôle du degré. Pour l'existence, on raisonne par récurrence sur n. Notons
   $$a = c_0(A) \neq 0, \qquad b = c_0(B) \neq 0$$
   Pour $n = 0$, $Q_0 = \frac{b}{a}$ convient.
   S'il existe Q_n et R_n vérifiant les conditions, on peut écrire
   $$R_n = X^{n+1}R \text{ avec } r = c_0(R)$$
   On vérifie alors que l'on peut prendre
   $$Q_{n+1} = Q_n + \frac{r}{a}X^{n+1}$$

c. On trouve

$$\begin{aligned} Q_3 &= 1 + X + X^2 - X^3 \\ R_3 &= X^4(1 + X - X^2) \end{aligned}$$

34. (Cpo34) On conjugue et on simplifie

$$AB = P = \overline{P} = \overline{AB} = A\overline{B} \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow B \in \mathbb{R}[X]$$

35. (Cpo35) On peut supposer P unitaire sans changer les racines. Le coefficient de X^{n-1} est lié à la somme des racines :

$$P = X^n - S_0 X^{n-1} + \cdots$$

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k} \\ &\quad - (n-1)(n-2)\cdots(n-k)S_0 X^{n-k-1} + \cdots \end{aligned}$$

On en déduit

$$S_k = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} S_0 = \frac{n-k}{n} S_0$$

36. (Cpo36) D'après les relations entre coefficients et racines, ils sont de la forme

$$P = X^3 - X^2 + uX - 1$$

avec $u \in \mathbb{C}$. Considérons un polynôme Q obtenu en inversant soit

$$Q = 1 - X + \bar{u}X^2 - X^3$$

Pour tout z complexe non nul,

$$\widetilde{P}(\frac{1}{\bar{z}}) = \frac{1}{\bar{z}^3}\left(1 - \bar{z} + u\bar{z}^2 - \bar{z}^3\right) = \frac{\overline{\widetilde{Q}(z)}}{\bar{z}^3}$$

De plus, z est de module 1 si et seulement si

$$z = \frac{1}{\bar{z}}$$

On en déduit que les racines de P sont de module 1 si et seulement si P et Q ont les mêmes racines c'est à dire égaux à un facteur complexe non nul près. On doit donc avoir $Q = -P$ ce qui se produit si $u = 1$. Le seul polynôme unitaire vérifiant les conditions est donc

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2 + 1)(X - 1)$$

dont les racines sont $1, i, -i$.

37. (Cpo37) Considérer la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ privé des racines de P par :

$$f(x) = a + \frac{\widetilde{P'}(x)}{\widetilde{P}(x)}$$

et les limites aux extrémités des intervalles où elle est définie.

38. pas de correction pour Epo38.tex

39. (Cpo39) Si z est une racine double, elle est aussi racine du polynôme dérivé donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} (z-1)^n = z^n - 1 \\ (z-1)^{n-1} = z^{n-1} \end{cases} &\Rightarrow (z-1)z^{n-1} = z^n - 1 \\ &\Rightarrow z^{n-1} = 1 \end{aligned}$$

On doit donc aussi avoir $(z-1)^{n-1} = 1$. Géométriquement z et $z-1$ dans le cercle unité ne peut se produire que si $z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. On doit donc avoir

$$(n-1)\frac{\pi}{3} \equiv 0 \mod (2^{\pi}) \Leftrightarrow n \equiv 1 \mod (6).$$

Réciproquement, si $n \equiv 1 \mod (6)$, alors $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une racine double. En effet $z - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc

$$z^{n-1} = (z-1)^{n-1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{P_n}(z) = z - 1 - z + 1 = 0 \\ \widetilde{P'_n}(z) = n(1-1) = 0. \end{cases}$$

Ainsi