1. (Ere01) Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \subset B$ entraîne
$$\sup A \leq \sup B \text{ et } \inf B \leq \inf A.$$
Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$
$$\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B)$$
et que
$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$$

2. (Ere02) Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On définit une partie de $\mathbb{R}$ notée $A+B$ par :
$$A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}.$$
Montrer $A+B$ est bornée et que
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \ \inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

3. (Ere03) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$, montrer que
$$\sup\left\{x - y, (x, y) \in A^2\right\} = \sup A - \inf A.$$

4. (Ere04) Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous x et y réels, montrer les relations
$$\begin{aligned}
&0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1\\
&\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}\\
&0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1\\
&-2 \leq 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leq 1
\end{aligned}$$

5. (Ere05) Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que
$$\forall (x, y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$
Montrer que $f(x) = x$ pour tous les x de $[0,1]$ ou que $f(x) = 1 - x$ pour tous les x de $[0,1]$.

6. (Ere06) Soit x un nombre réel, on suppose qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers tels que, pour tous les entiers n :
$$0 < \left|x - \frac{y_n}{n!}\right| < \frac{1}{n!}.$$
Montrer que x est irrationnel.

7. (Ere07) Soit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux nombres rationnels. Montrer que
$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}, \ \frac{a}{b} < \frac{pa + qc}{pb + qd} < \frac{c}{d}.$$
En particulier, $\frac{a+c}{b+d}$ est la fraction *médiane* de $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

8. (Ere08) **Suites de Farey.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Parmi tous les rationnels de $]0,1[$, considérons ceux qui peuvent s'écrire avec un dénominateur inférieur ou égal à n. La suite ordonnée de ces nombres forme, par définition, la *suite de Farey* d'ordre n. On la note $\mathcal{S}_n$.
   a. Former $\mathcal{S}_n$ pour n entre 3 et 5.
   b. Pour les $\mathcal{S}_n$ calculées : vérifier que le numérateur de la difference entre deux termes consécutifs de $\mathcal{S}_n$ vaut 1 après simplification et que le deuxième terme d'une séquence de trois termes consécutifs est la fraction médiane des deux autres (définie en 7 (Ere07)).

9. (Ere09) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'ensemble des valeurs de la suite de Farey $\mathcal{S}_n$. (Ex 8 (Ere08))
Soit $x \in]0,1[$ irrationnel.
   a. Justifier l'existence de $\alpha_n = \min\{|x-u|, u \in F_n\}$ et montrer que $\alpha_n > 0$. Que penser d'un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $\left|\frac{p}{q} - x\right| < \alpha_n$?
   b. Soit $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $0 < p_n < q_n$ dans $\mathbb{N}$, une suite de rationnels qui converge vers l'irrationnel x. Montrer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

10. (Ere10) Critères d'irrationalité.
   a. Soit $\beta > 0$ rationnel, montrer qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$,
$$\frac{p}{q} \neq \beta \Rightarrow \left|\beta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_0}$$
   b. Soit $\beta > 0$ irrationnel, montrer que les valeurs de la suite des parties fractionnaires $(\{n\beta\})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux distinctes. On dira que la suite est injective. En déduire
$$\beta > 0 \text{ irrationnel} \Rightarrow$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ tq } 0 < |q\beta - p| \leq \frac{1}{n}$$
   c. Soit $\beta > 0$ pour lequel qu'il existe un $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$,
$$\frac{p}{q} \neq \beta \Rightarrow \left|\beta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_0}$$
   Montrer que β est rationnel.
   d. Montrer qu'un nombre réel $x > 0$ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n x + b_n \neq 0 \text{ et } (a_n x + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

11. (Ere11) Quels sont les réels x tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$?

12. (Ere12) Soit α et $\beta \in \mathbb{R}$. Remplacer les « ? » dans les formules suivantes par des expressions formées avec α, β $\lfloor \ \rfloor$ et $\lceil \ \rceil$. La première ligne du tableau est un exemple.

Partie de $\mathbb{R}$	Intervalle entier	Nb élts
$]0,\beta] \cap \mathbb{Z}$	$]\!]0, \lfloor\beta\rfloor]\!]$	$\lfloor\beta\rfloor$
$]-\infty,\beta] \cap \mathbb{Z}$	$]\!]-\infty, ?\,]\!]$	
$[\alpha,+\infty[\cap \mathbb{Z}$	$[\![\,?\,, +\infty[\![$	
$]\alpha,\beta] \cap \mathbb{Z}$	$]\!]\,?\,,\,?\,]\!]$	?
$[\alpha,\beta[\cap \mathbb{Z}$	$[\![\,?\,,\,?\,[\![$	?
$]\alpha,\beta[\cap \mathbb{Z}$	$]\!]\,?\,,\,?\,[\![$	?
$[\alpha,\beta] \cap \mathbb{Z}$	$[\![\,?\,,\,?\,]\!]$	?

13. (Ere13) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives qui converge vers 0. Notons
$$\forall p \in \mathbb{N}, \ X_p = \{x_n, \ n \geq p\}$$

a. Montrer l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0.

b. Montrer que, quelque soit $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble X_p admet un plus grand élément.

c. Soit A l'ensemble des $p \in \mathbb{N}$ tels que $x_p = \max X_p$. En raisonnant par l'absurde, montrer que A est infini.

14. (Ere14) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives. Montrer en utilisant la définition avec ε et N_ε et en précisant soigneusement le N que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Leftrightarrow (\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

15. (Ere15) Suites sous-additives. Lemme de Feteke.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

Montrer que $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. *(difficile, utiliser une division euclidienne.)*

16. (Ere16) On rappelle les notations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } k \leq x\} \\ \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \text{ tq } x \leq k\} \\ x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \end{cases}.$$

a. Montrer que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ pour tout x réel.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor$.
En déduire $\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$ si $n \neq 0$.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ réel,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Étendre la formule à tous les x réels.

17. (Ere17) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = x_{n+1} - x_n \qquad a_n = d_n^+ \qquad b_n = d_n^-$$
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad D_n = \sum_{k=0}^{n} |d_k|$$

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la différence de deux suites croissantes. Montrer que la convergence de $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entraine celle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
voir l'exercice sur la définition de l'exponentielle complexe.

18. (Ere18) Soit f une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On considère

$$A = \{x \in [0,1] \text{ tel que } f(x) \geq x\}$$
$$B = \{x \in [0,1] \text{ tel que } x \geq f(x)\}$$

Montrer que A est non vide et que sa borne supérieure c est un point fixe de f (c'est à dire $f(c) = c$). Montrer que B est non vide et que sa borne inférieure d est un point fixe de f.

19. (Ere19) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On note :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = A_n + a_n.$$

Sous quelle condition, les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ?
Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $a_n = \frac{x^n}{n!}$. La condition précédente s'applique-t-elle ?

20. (Ere20) On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \cdot k!}$$

a. Soit n et m dans $\mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k \cdot k!} \leq \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

b. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note x sa limite.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$0 < x - x_n \leq \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

En déduire que x est irrationnel.

21. (Ere21) On rappelle que la partie fractionnaire d'un réel x est $x - \lfloor x \rfloor$. Elle est souvent notée $\{x\}$.
Soit n entier naturel, montrer que $(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ est la partie fractionnaire de $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$.
Soit d un nombre naturel qui n'est pas le carré d'un nombre naturel, soit a et b des naturels non nuls. Sous quelle condition $(a - b\sqrt{d})^{2n+1}$ est-il la partie fractionnaire de $(a + b\sqrt{d})^{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

22. (Ere22) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers p tels que, pour tout entier n :

$$n \geq p \Rightarrow x_n \leq x_p$$

23. (Ere23) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction croissante de I dans I. Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

24. (Ere24) Soit

$$A = \left\{ \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{x_i}{x_j}, (x_1, \cdots, x_n) \in]0, +\infty[^n \right\}$$

Montrer que A admet une borne inférieure. Admet-il un plus petit élément ?

25. (Ere25) Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $Y \subset \mathbb{R}$ non vides telles que

$$\forall (x,y) \in X \times Y, \ x \leq y.$$

a. Montrer que X est majoré, Y minoré et former une inégalité entre $\sup X$ et $\inf Y$.

b. Montrer que $\sup X = \inf Y$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in X \times Y \text{ tq } y_\varepsilon - x_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

26. (Ere26) Montrer que pour tous x et y réels,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor.$$

27. (Ere27) Montrer que

$$(1) \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor = n$$

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{2} \rfloor$$

28. (Ere28) Montrer que A est borné et préciser ses bornes avec

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

29. (Ere29) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$D_x(A) = \{|x-a|, a \in A\},\ d(x,A) = \inf D_x(A).$$

a. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |d(x,A) - d(y,A)| \leq |x-y|.$$

b. Montrer que, pour tout réel x,

$$d(x,A) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in A \end{cases}.$$

30. (Ere30) Pour tout réel x,

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* \text{ tq } qx \in \mathbb{Z}.$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$, notons

$$q(x) = \min \{q \in \mathbb{N}^* \text{ tq } qx \in \mathbb{Z}\},\ p(x) = xq(x).$$

Notons $n = p(x^2) = xq(x^2)$.

a. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{N},\ nq(x) - ap(x) = x\left(q(x^2)p(x) - aq(x)\right).$$

b. Soit $a = \lfloor q(x^2)x \rfloor$. Montrer que

$$0 \leq q(x^2)p(x) - aq(x) < q(x).$$

En déduire $q(x^2)p(x) - aq(x) = 0$ puis $q(x^2)x \in \mathbb{N}$.

c. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Montrer (sans arithmétique) que

$$x^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}.$$

1. pas de correction pour Ere01.tex
2. (Cre02) Pour tout $s \in A+B$, il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que
$$s = a + b \Rightarrow \inf A + \inf B \leq s \leq \sup A + \sup B.$$
On en déduit que $A+B$ est bornée et que
$$\inf A + \inf B \leq \inf(A+B) \leq \sup(A+b) \leq \sup A + \sup B.$$
D'autre part, notons $S = \sup(A+B)$,
$$\begin{aligned}
&(\forall a \in A, \forall b \in B,\ a+b \in A+B)\\
&\Rightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B,\ a+b \leq S)\\
&\Rightarrow (\forall a \in A, (\forall b \in B,\ b \leq S-a))\\
&\Rightarrow (\forall a \in A, S-a \text{ majore } B)\\
&\Rightarrow (\forall a \in A, \sup B \leq S-a)\\
&\Rightarrow (\forall a \in A, a \leq S - \sup B)\\
&\Rightarrow (S - \sup B \text{ majore } A)\\
&\Rightarrow \sup A \leq S - \sup B \Rightarrow \sup A + \sup B \leq \sup(A+B).
\end{aligned}$$
On en déduit $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$.
L'égalité pour les bornes inférieures se démontre par une suite d'implications analogues commençant par
$$(\forall a \in A, \forall b \in B,\ \inf(A+B) \leq a+b) \Rightarrow \cdots.$$
3. (Cre03) On peut raisonner comme dans l'exercice 2. On peut aussi appliquer le résultat de cet exercice en notant
$$B = \{-a, a \in A\}.$$
et en commençant par vérifier que
$$\sup B = -\inf A.$$
4. (Cre04) Écrivons les encadrements définissant les parties entières. En les combinant, on obtient des encadrements avec des inégalités strictes. Elles sont équivalentes aux inégalités larges demandées parce que les quantités en jeu sont entières.
5. (Cre05) En appliquant la relation avec 0 et 1, on obtient $|f(0)-f(1)| \geq 1$ ce qui, combiné avec $f(0)$ et $f(1)$ dans $[0,1]$, entraine que $f(0)=0$ et $f(1)=1$ ou $f(0)=1$ et $f(1)=0$. On passe d'un cas à l'autre en considérant $1-f$ qui vérifie la même propriété que f.
On suppose donc $f(0)=0$ et $f(1)=1$. On applique la propriété entre 0 et $x \in]0,1[$:
$$\left.\begin{aligned}&|f(x)| \geq |x|\\ &f(x) \in [0,1]\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) \geq x$$
puis entre 1 et x
$$\left.\begin{aligned}&|f(x)-1| \geq |x-1|\\ &f(x) \in [0,1]\end{aligned}\right\} \Rightarrow 1-f(x) \geq 1-x$$
$$\Rightarrow f(x) \leq x$$
6. pas de correction pour Ere06.tex
7. pas de correction pour Ere07.tex
8. pas de correction pour Ere08.tex
9. pas de correction pour Ere09.tex
10. (Cre10) Critères d'irrationalité.
    a. Soit $\beta = \frac{a}{b} > 0$ avec a et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors
    $$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| = |qa - pb| \frac{1}{bq}$$
    On peut donc prendre $q_0 = b$ car $|qa - pb| \geq 1$ (naturel non nul).
    b. Si m et n sont des entiers distincts tels que
    $$n\beta = \lfloor n\beta \rfloor + \{n\beta\} \text{ et } m\beta = \lfloor m\beta \rfloor + \{m\beta\}$$
    alors
    $$\{n\beta\} = \{m\beta\} \Rightarrow \beta = \frac{\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor m\beta \rfloor}{n-m} \in \mathbb{Q}$$
    La suite injective $(\{n\beta\})_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs dans $]0,1[$. Pour tout $n>0$, il existe (principe des tiroirs) des entiers distincts u et v tels que
    $$|\{u\beta\} - \{v\beta\}| < \frac{1}{n}$$
    On en tire
    $$\left|\underbrace{(u-v)}_{=q}\beta - \underbrace{(\lfloor u\beta \rfloor - \lfloor v\beta \rfloor)}_{=p}\right| < \frac{1}{n}$$
    c. La proposition contraposée de la précédente est :
    $$\left(\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \left[\begin{aligned}&|q\beta - p| = 0\\ &\text{ou}\\ &|q\beta - p| > \frac{1}{n}\end{aligned}\right.\right)$$
    $$\Rightarrow \beta \text{ rationnel}$$
    Lorsque β vérifie l'hypothèse de c. et en prenant un $n > q_0$, la proposition entre parenthèse est vérifiée assurant que β est rationnel.
    d. Supposons β irrationnel. La question b. montre l'existence des suites d'entiers vérifiant la condition.
    Réciproquement, supposons l'existence des suites d'entiers a_n et b_n vérifiant la condition. La condition de la question a. ne peut alors être vérifiée donc β n'est pas rationnel.
11. (Cre11) Comme les deux parties entières sont des entiers, il faut et il suffit que l'une soit 1 et l'autre 0. Après manipulations des inégalités, on trouve que l'ensemble des solutions est
$$\left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1,2[$$
12. (Cre12)
$$[\alpha, +\infty[= [\![\lceil \alpha \rceil, +\infty[\![\qquad]-\infty, \beta] =]\!]-\infty, \lfloor \beta \rfloor]\!]$$

Partie de $\mathbb{R}$	Intervalle entier	Nb élts
$]0,\beta]\cap\mathbb{Z}$	$]\!]0,\lfloor\beta\rfloor]\!]$	$\lfloor\beta\rfloor$
$]\alpha,\beta]\cap\mathbb{Z}$	$]\!]\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor\beta\rfloor]\!]$	$\lfloor\beta\rfloor-\lfloor\alpha\rfloor$
$[\alpha,\beta[\cap\mathbb{Z}$	$[\![\lceil\alpha\rceil,\lceil\beta\rceil[\![$	$\lceil\beta\rceil-\lceil\alpha\rceil$
$]\alpha,\beta[\cap\mathbb{Z}$	$]\!]\lfloor\alpha\rfloor,\lceil\beta\rceil[\![$	$\lceil\beta\rceil-\lfloor\alpha\rfloor-1$
$[\alpha,\beta]\cap\mathbb{Z}$	$[\![\lceil\alpha\rceil,\lfloor\beta\rfloor]\!]$	$\lfloor\beta\rfloor-\lceil\alpha\rceil-1$

13. (Cre13)

a. Notons $i_0=0$. D'après la définition de la convergence avec $\varepsilon=x_{i_0}$, il existe $i_>i_0$ tel que
$$0<x_{i_1}<x_{i_0}$$
On construit ainsi par récurrence une suite d'indices $i_0<i_1<\cdots$. La construction de l'indice suivant i_p est justifié par le raisonnement suivant. Comme $x_{i_p}>0$ et que la suite converge vers 0, il existe i_{p+1} tel que
$$i_{p+1}>i_p \text{ et } x_{i_{p+1}}<x_{i_p}$$
La suite extraite $\left(x_{i_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante. Elle converge vers 0 car elle est extraite d'une suite qui converge vers 0.

b. Soit $p\in\mathbb{N}$ et v un élément quelconque de X_p (peu importe l'indice en lequel il est atteint). Comme la suite converge vers 0, il existe un $n_v>p$ tel que
$$n\geq n_v\Rightarrow x_n\leq v$$
On en déduit que
$$\max(x_p,x_{p+1},\cdots,x_{n_v},v)$$
est le plus grand élément de X_p.

c. On raisonne par l'absurde.
Si A est fini, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n\geq N,\ x_n\neq\max X_n$$
Or $x_n\in X_n$ donc
$$x_n\neq\max X_n\Leftrightarrow x_n<\max X_n$$
Notons $i_0=N$, il existe $i_1>N$ tel que
$$x_{i_0}<x_{i_1}=\max X_{i_0}$$
Alors $x_{i_1}<\max X_{i_1}$ donc il existe $i_2>i_1$ tel que
$$x_{i_1}<x_{i_2}=\max X_{i_1}$$
On forme ainsi une suite extraite $\left(x_{i_p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ croissante en contraction avec la convergence vers 0 de la suite.

14. (Cre14) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_{u,\varepsilon} \text{ tq } \ldots.$$
Le N_{u,ε^2} est un « N_ε » qui convient pour justifier que $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
$$n\geq N_{u,\varepsilon^2}\Rightarrow 0\geq u_n\geq\varepsilon^2\Rightarrow 0\geq\sqrt{u_n}\geq\varepsilon.$$
Réciproquement, si $(\sqrt{u_n})_{n\in\mathbb{N}}\to 0$, le $N_{\sqrt{u},\sqrt{\varepsilon}}$ est un « N_ε » qui justifie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\to 0$.

15. (Cre15) Soit $V=\left\{\frac{u_n}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et $l=\inf V$.
Il s'agit de la borne inférieure d'une partie non vide minorée par 0. Par définition c'est un minorant de V donc
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ l\leq\frac{u_n}{n}.$$
Soit $\varepsilon>0$. Alors $l+\frac{\varepsilon}{2}\leq l$ est faux donc $l+\frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un minorant de V (la borne inférieure est le plus grand des minorants). Donc :
$$\exists s\in\mathbb{N}^* \text{ tq } \frac{u_s}{s}<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$
Écrivons la division euclidienne de $n\in\mathbb{N}$ par s :
$$\exists(q,s)\in\mathbb{N}\times[\![0,s-1]\!] \text{ tq } n=q\,s+r.$$
La condition de sous-additivité entraine
$$u_n\leq q\,u_s+u_r.$$
Notons $M=\max(u_1,u_2,\cdots,u_{s-1}$ et divisons par n :
$$\frac{u_n}{n}\leq\frac{q}{n}u_s+\frac{u_r}{n}\leq\underbrace{\frac{qs}{n}}_{\leq 1}\frac{u_s}{s}+\frac{M}{n}\leq\frac{u_s}{s}+\frac{M}{n}.$$
Comme la suite $(\frac{M}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0,
$$\exists t\in\mathbb{N} \text{ tq } n\geq t\Rightarrow\frac{M}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$
Soit $N=\max(s,t)$.
$$\forall n\geq N,\ l\leq\frac{u_n}{n}\leq\underbrace{\frac{u_s}{s}}_{\leq l+\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{\frac{M}{n}}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}\leq l+\varepsilon.$$
Voir le corrigé du problème Et si j'en achète plusieurs ? Combien pour chaque ? sur les suites sous-additives

16. (Cre16)

a. Par définition de la partie entière supérieure puis de la partie entière usuelle
$$\begin{aligned}-x\leq\lceil -x\rceil\Rightarrow-\lceil -x\rceil\leq x\Rightarrow-\lceil -x\rceil\leq\lfloor x\rfloor\\ \Rightarrow-\lfloor x\rfloor\leq\lceil -x\rceil\end{aligned}$$
De manière analogue,
$$\lfloor x\rfloor\leq x\Rightarrow -x\leq-\lfloor x\rfloor\Rightarrow\lceil -x\rceil\leq-\lfloor x\rfloor$$

b. On décompose x en partie entière et fractionnaire
$$\begin{aligned}x=\lfloor x\rfloor+\{x\}\Rightarrow nx=\underbrace{n\lfloor x\rfloor}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{n\{x\}}_{\in[0,n[}\\ \Rightarrow\lfloor nx\rfloor=n\lfloor x\rfloor+\underbrace{\lfloor n\{x\}\rfloor}_{\in[\![0,n-1]\!]}\\ \Rightarrow\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor=\lfloor x\rfloor+\underbrace{\frac{1}{n}\lfloor n\{x\}\rfloor}_{\in[0,1[}\\ \Rightarrow\lfloor\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\rfloor=\lfloor x\rfloor\end{aligned}$$

c. Notons que $0 < x + \frac{k}{n} < 2$, sa partie entière ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. La somme proposée est donc égale au nombre de k pour lesquels la partie entière vaut 1. Or

$$\begin{aligned}\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x + \frac{k}{n} \\ \Leftrightarrow n(1-x) \leq k \Leftrightarrow \lceil n(1-x) \rceil \leq k\end{aligned}$$

On en déduit que la somme cherchée vaut

$$\begin{aligned}\sharp [\![\lceil n(1-x) \rceil, n-1]\!] &= n - 1 - \lceil n(1-x) \rceil + 1 \\ &= n - \lceil n - nx \rceil = -\lceil -nx \rceil = \lfloor nx \rfloor\end{aligned}$$

en utilisant le a. et le fait que $\lceil y + m \rceil = m + \lceil y \rceil$ pour y réel et m entier. En utilisant une formle analogue pour la partie entière, on étend facilement la relation dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la première formule de la question b.

17. (Cre17) Par définition de la partie positive et de la partie négative d'un réel,

$$\begin{aligned}x_{k+1} - x_k = d_k = a_k - b_k \\ \Rightarrow x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k = x_0 + A_n - B_n.\end{aligned}$$

Les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes car

$$A_{n+1} - A_n = a_n \geq 0,\ B_{n+1} - B_n = b_n \geq 0.$$

D'autre part

$$|d_k| = a_k + b_k \Rightarrow D_n = A_n + B_n.$$

Si la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est majorée. Soit D un de ses majorants. C'est aussi un majorant des suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme ces suites sont croissantes, elles convergent. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la différence des deux donc elle converge aussi.

18. pas de correction pour Ere18.tex

19. (Cre19) Examinons les différentes conditions.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante} \\ A_n \leq B_n \end{cases}.$$

$$(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

$$\begin{aligned}&(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} + a_{n+1} \leq A_n + a_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 2a_{n+1} \leq a_n.\end{aligned}$$

De plus cette condition assure que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
Pour $x_n = \frac{x^n}{n!}$ cette condition est vérifiée seulement pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$ car

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\,x}{n+1}.$$

20. pas de correction pour Ere20.tex

21. (Cre21) Séparons les indices pairs et impairs de la formule du binôme :

$$(\sqrt{3}+1)^{2n+1} = \underbrace{\sum_{k \text{ pair}} \binom{2n+1}{k} \sqrt{3}^{2n+1-k}}_{=A} + \underbrace{\sum_{k \text{ impair}} \binom{2n+1}{k} \sqrt{3}^{2n+1-k}}_{=B}$$

Lorsque k est impair, $2n+1-k$ est pair donc B est entier. De plus, en considérant le développement de $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$, on obtient que

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}+1)^{2n+1} + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}\right) \\ B &= \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$(\sqrt{3}+1)^{2n+1} = 2B + (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$$

avec

$$0 < (\sqrt{3}-1)^{2n+1} < 1$$

car $1 < \sqrt{3} < 2$.
Si $(a - b\sqrt{d})^{2n+1} = \left\{(a + b\sqrt{d})^{2n+1}\right\}$ alors on doit avoir

$$0 < a - b\sqrt{d} < 1$$

La condition est suffisante car on peut raisonner exactement comme avec $\sqrt{3}+1$. On remarque que la condition se traduit par

$$a = \lceil b\sqrt{d} \rceil.$$

qui permet des calculs fournissant d'autres exemples :

$$5 + 2\sqrt{5},\ 8 + 3\sqrt{7},\ \cdots$$

22. (Cre22) Notons, pour tout entier p

$$X_p = \{x_n, n \geq p\}$$

Cela permet de reformuler la condition de l'énoncé :

$$\forall n \geq p : x_n \leq x_p \Leftrightarrow x_p = \max X_p$$

On nous demande donc de prouver que, lorsque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, l'ensemble (notons le A) des p tels que $x_p = \max X_p$ est infini.
En fait on va montrer que lorsque cet ensemble est fini, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* ce qui est évidemment incompatible (thm de passage à la limite dans une inégalité) avec une convergence vers 0.

Si A est fini, il existe un N tel que pour tout $n \geq N$: $x_n < \max X_n$. Posons $i_0 = N$

$$\begin{aligned}x_{i_0} < \max X_{i_0} \Rightarrow \exists i_1 > i_0 \text{ tel que } x_{i_0} < x_{i_1} \\ x_{i_1} < \max X_{i_1} \Rightarrow \exists i_2 > i_1 \text{ tel que } x_{i_1} < x_{i_2} \\ \cdots\end{aligned}$$

23. (Cre23) Soit x dans I tel que $f\circ f(x)=x$. Si $x\leq f(x)$ alors $f(x)\leq f\circ f(x)=x$ car f est croissante donc $f(x)=x$. De même si $f(x)\leq x$.
24. (Cre24) La partie A est non vide et minorée par 0. Montrons qu'elle admet un plus petit éléments

$$\in A = \min A = n^2.$$

En effet $n^2\in A$ en prenant tous les $a_i=1$. D'autre part, on sait que
$$\forall t>0,\ t+\frac{1}{t}\geq 2.$$
On en déduit,
$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}\frac{x_i}{x_j} &= n+2\sum_{i<j}\left(\underbrace{\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}}_{\geq 2}\right)\\ &\geq n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2 = n^2.\end{aligned}$$
Donc n^2 est bien un minorant de A qui appartient à A.
25. (Cre25) Traduisons l'hypothèse en termes de bornes supérieure et inférieure
$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in X\times Y,\ x\leq y &\Rightarrow \forall x\in X, (\forall y\in Y,\ x\leq y)\\ &\Rightarrow \forall x\in X, x \text{ est un minorant de } Y\\ &\Rightarrow \forall x\in X, x\leq \inf Y \ (\inf Y \text{ max des minorants})\\ &\Rightarrow \inf Y \text{ est un majorant de } X\\ &\Rightarrow \sup X\leq \inf Y \ (\sup X \text{ min des majorants}).\end{aligned}$$
26. (Cre26) La formule est conservée si on ajoute des entiers à x et y. On peut donc supposer x et y dans $[0,1[$. On vérifie ensuite la formule dans différents cas selon la position par rapport à $\frac{1}{2}$.
27. (Cre27) Preuve de (1). Notons s la somme des parties entières. Avec les encadrements de définition habituels, on obtient :
$$n-\frac{3}{2}<s\leq n+\frac{1}{2}$$
Cela justifie seulement $s\in\{n-1,n\}$. Pour terminer, on remarque que $n+m$ et $n-m+1$ n'ont pas la même parité. On peut donc remplacer un des encadrements par une égalité ce qui conduit à
$$n-\frac{1}{2}<s\leq n+\frac{1}{2}\Rightarrow s=n.$$
Preuve de (2).
$$\begin{aligned}x &= \lfloor x+\rfloor + \{x\}\\ &\Rightarrow \lfloor\frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor\underbrace{\frac{\lfloor x\rfloor+1}{2}}_{\in\frac{\mathbb{Z}}{2}}+\underbrace{\frac{\{x\}}{2}}_{\in[0,\frac{1}{2}[}\rfloor = \lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{2}\rfloor.\end{aligned}$$
28. (Cre28) Vérifier que $\max A=\frac{3}{2}$ et $\inf A=-1$.
29. (Cre29)
    a. Soit $A\subset\mathbb{R}$ et x, y réels
$$\begin{aligned}&\forall a\in A,\ d(x,A)\leq |x-a|\leq |x-y|+|y-a|\\ &\Rightarrow \forall a\in A,\ d(x,A)-|x-y|\leq |y-a|\\ &\Rightarrow \forall a\in A,\ d(x,A)-|x-y| \text{ minorant de } D_y(A)\\ &\Rightarrow \forall a\in A,\ d(x,A)-|x-y|\leq d(y,A)=\inf D_y(A)\\ &\Rightarrow \forall a\in A,\ d(x,A)-d(y,A)\leq |x-y|.\end{aligned}$$
    On obtient l'autre inégalité en partant de $d(y,A)$.
    b. à compléter
30. pas de correction pour Ere30.tex