1. (Esc01) Montrer la convergence et préciser la limite des suites
$$\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

2. (Esc02) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. On suppose que les trois suites extraites
$$(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\ (x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}},\ (x_{3n})_{n\in\mathbb{N}},$$
sont convergentes. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. (Esc03) On considère des réels a, b, et des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\begin{aligned} 0 &< a < b, a_0 = a, b_0 = b \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} \end{aligned}$$
Montrer que les suites sont adjacentes, exprimer la limite commune lorsque $a = b\cos\alpha$.

4. (Esc04) Pour tout $x \geq 0$, on définit des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par
$$x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n+x}}}}$$
De plus, y_n est obtenu en remplaçant dans x_n le n de la dernière racine par $2n$.
   a. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   b. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $\varphi(x)$ sa limite.
   c. Montrer que la fonction φ est croissante. Montrer qu'en fait elle est constante.

5. (Esc05) Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
   a. Factoriser
$$\begin{aligned} &\cos((n+1)\alpha) - \cos((n-1)\alpha) \\ &\sin((n+1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha). \end{aligned}$$
   b. Montrer que la convergence de l'*une* des deux suites $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ entraine la convergence de l'autre. Montrer que la convergence simultanée des deux est impossible. Que peut-on en conclure ?

6. (Esc06) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

7. (Esc07) Pour tout naturel non nul n, on pose
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
   a. Montrer que
$$\forall\alpha\in\,]0,1[\,, \forall n\geq 2, (1-\alpha)^n > 1-n\alpha$$
   b. En prenant $\alpha = \frac{1}{n^2}$, montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c. En prenant $\alpha = \frac{1}{6n+1}$, montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Conclure.

8. (Esc08) Théorème de Césaro.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
   a. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
   b. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
   c. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante entraine $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante.
   d. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et vers la même limite.
   e. On suppose que $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l, montrer que $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
   f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l>0$.
   Montrer que $(u_n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Montrer que la réciproque est fausse en considérant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$u_{2p} = \frac{2^p}{3^p},\ u_{2p+1} = \frac{2^{p+1}}{3^p}.$$
   g. Déterminer les limites des suites
$$\left(\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\quad \left(\frac{(1\times 3\times\cdots\times(2n-1))^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
$$\left(\frac{(n(n+1)\cdots(2n))^{\frac{1}{n}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\quad (n(n!)^{-\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$$
$$\left((x_1^n+x_2^n+\cdots+x_p^n)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec les } x_i>0$$

9. (Esc09) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que
$$\forall(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}: \quad 0\leq u_n\leq\frac{k}{n}+\frac{1}{k}$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

10. (Esc10) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

11. (Esc11) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$s_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k.$$
   a. Soit $k\in\mathbb{N}$, montrer que
$$\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)_{n\geq k}\longrightarrow 0$$
   b. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rémy Nicolai _fex_scpdf du 23 novembre 2018

12. (Esc12) Montrer que, de toute suite réelle non majorée, on peut extraire une suite strictement croissante. Généraliser avec l'exercice 29 (Esc29).

13. (Esc13) La moyenne *harmonique* de deux réels strictement positifs x et y est le réel h tel que
$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$
Comparer h avec la moyenne habituelle m de x et y.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$$
Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

14. (Esc14) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} : 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$
Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone de limite 0 puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Généraliser avec :
$$u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n \geq 0$$
puis
$$u_{n+p} - \binom{n}{1}u_{n+p-1} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{n}{p-1}u_{n+1} + (-1)^pu_n \geq 0$$

15. (Esc15) Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{\pi^2}{8}$$

16. (Esc16) Montrer que
$$(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor)_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{x}{2}$$

17. (Esc17) Pour tout naturel $n \geq 1$, on pose
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$
   a. Montrer que : $\ln(1 + x) \leq x$ pour tous les $x > -1$.
   b. Déduire du a. que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k + 1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
   puis montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (former $u_{n+1} - u_n$ et considérer $\frac{1}{n+1}$)
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite (constante d'Euler) et
   $$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
   $$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
   Montrer que $a_{2p} = s_{2p} - s_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire la convergence et la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

18. (Esc18) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est dite *de Cauchy* si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que :
$$\forall(p, q) \in \mathbb{N}^2 : \left.\begin{matrix} p > N_\varepsilon \\ q > N_\varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$$
   a. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   b. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
   c. En utilisant le théorème de Bolzano-Weirstrass, montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

19. (Esc19) Soit p naturel fixé et $x_1, \cdots, x_p$ et $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ des réels strictement positifs fixés. Montrer que
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_kx_k^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \max(x_1 \cdots, x_p)$$
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_kx_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \min(x_1 \cdots, x_p)$$

20. (Esc20) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. En utilisant la décomposition en somme de deux carrés (résultant de la méthode de factorisation canonique), montrer que
$$(u_n^2 + u_nv_n + v_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow \begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \end{cases}$$

21. (Esc21) Calculer la limite de la suite
$$\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k(k+2)})\right)_{n\geq1}.$$
En déduire la convergence de
$$\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k(k+1)})\right)_{n\geq1}.$$

22. (Esc22) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}} \to l$. Montrer que,
$$l < 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$
$$l > 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty.$$

23. (Esc23) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $(u_n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Montrer que, si $l < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que si $l > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

24. (Esc24) Soit $a_1, a_2, \cdots, a_p$ des réels tels que $(\sum_{i=1}^{n} a_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ |a_i| < 1.$$

25. (Esc25) On admet que
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to e$$

On pose, pour tout entier n,

$$a_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\qquad p_n = n!e - a_n$$

Montrer que

$$\frac{1}{n+1} < p_n < \frac{1}{n}$$

Que peut-on en déduire pour la suite des p_n ? Montrer que

$$(n\sin(2\pi e n!)_{n\in\mathbb{N}} \to 2\pi$$

26. (Esc26) Déterminer les limites des suites

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\lfloor kx\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Pour la dernière suite, x est un réel fixé > 0.

27. (Esc27) Soit $0 < u_0 < u_1$ et $0 < r < 1$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant, pour $n \geq 0$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r^{n+1}u_n$$

Montrer que la suite est convergente.

28. (Esc28) Montrer que les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1},\quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

sont adjacentes.

29. (Esc29) Limite supérieure, limite inférieure d'une suite bornée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On note

$$V_n = \sup\{x_k, k\geq n\},\ v_n = \inf\{x_k, k\geq n\}$$

   a. Montrer $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et que les deux sont convergentes. Leurs limites sont appelées respectivement *limite supérieure* et *limite inférieure* de la suite bornée.
   b. Montrer que s'il existe un n tel que $\{x_k, k\geq n\}$ n'admette ni plus petit ni plus grand élément alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone.
   c. Montrer que si, pour tout n entier, $\{x_k, k\geq n\}$ admet un plus petit et un plus grand élément, alors on peut extraire des suites croissantes et décroissantes. Conclure avec 12 (Esc12) que de toute suite, on peut extraire une suite monotone.

30. (Esc30) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel n, la suite

$$\left((\cos(n!\,\pi x)^{2m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

converge. On note $l_n(x)$ sa limite. Montrer que $(l_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\varphi(x)$ sa limite. Préciser la fonction φ.

31. (Esc31) Soit $a > 0$ fixé.
   a. Vérifier que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x + x^2 + \cdots + x^n = a$$

   admet une unique solution dans $]0, +\infty[$ notée x_n.
   b. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Préciser sa limite.

32. (Esc32) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2},\ v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}.$$

33. (Esc33) Déterminer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \frac{1+3+\cdots+(2n+1)}{1+2+\cdots+n}.$$

34. (Esc34) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1.$$

En utilisant la formule du binôme, montrer que $u_n^2 \leq \frac{2}{n}$. En déduire que $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. Quelle est la démonstration normale ?

35. (Esc35) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$.
   a. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note v sa limite.
   c. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée et $v = 0$. Montrer que $|u_n| \leq v_{n-1}$. En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
   d. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to v$.

1. pas de correction pour Esc01.tex
2. pas de correction pour Esc02.tex
3. pas de correction pour Esc03.tex
4. (Csc04) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{n+t} \end{cases}$$

On pose aussi $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$. Les fonctions f_n et F_n sont croissantes pour tous les n.
Pour $x \geq 0$, on a donc $x_n = F_n(x)$.

a. Alors

$$x_{n+1} = F_n(f_{n+1}(x))$$

Pour x fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Donc pour n assez grand

$$x \leq f_{n+1}(x)$$

On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

b. Avec ces notations, le y_n défini par l'énoncé s'écrit

$$y_n = F_n(x+n)$$

Alors, pour tout n, $x_n \leq y_n$ car F_n est croissante. De plus

$$y_{n+1} = F_n(f_{n+1}(x+n+1)) = F_n(\sqrt{x+2n+2})$$

Pour x fixé,

$$\left(x+n-\sqrt{x+2n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$$

Donc pour n assez grand,

$$\sqrt{x+2n+2} \leq x+n \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n$$

Si on se place assez loin pour que la suite des x_n soit croissante et celle des y_n décroissante, n'importe quel y_n majore $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sauf pour un nombre fini de termes. Ceci assure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc convergente. On note $\varphi(x)$ sa limite.

c. Supposons $0 \leq x \leq y$. Comme F_n est croissante : $F_n(x) \leq F_n(y)$. Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ donc φ croissante.
Pour montrer qu'elle est constante, on remarque que (en multipliant par la quantité conjuguée)

$$0 \leq \sqrt{k+y} - \sqrt{k+x} \leq \frac{y-x}{2\sqrt{k}}$$

On en déduit par récurrence que

$$0 \leq F_n(y) - F_n(x) \leq \frac{y-x}{2^n\sqrt{n!}}$$

Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient $\varphi(x) = \varphi(y)$.

5. pas de correction pour Esc05.tex
6. pas de correction pour Esc06.tex
7. pas de correction pour Esc07.tex
8. (Csc08)

a. Plaçons nous d'abord dans le cas où $u_n \geq 0$ pour tous les n.
Une inégalité *à la Cesaro* est obtenue en coupant arbitrairement une somme .
Soit $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq m$:

$$0 \leq y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_m) + \frac{1}{n}(x_{m+1} + \cdots + x_n)$$
$$\leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_m) + \frac{n-m}{n}\max(x_{m+1}, \cdots, x_n).$$

Il est important de comprendre que l'on ne peut pas conclure que la suite converge vers 0 en utilisant les théorèmes habituels (encadrement ou passage à la limite dans une inégalité). Il est impératif d'utiliser la définition de la convergence et des justifications soigneusement ordonnées.
Pour tout $\varepsilon > 0$.

1. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$, il existe m tel que

$$k > m \Rightarrow x_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, pour $n > m$, $\max(x_{m+1}, \cdots, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Pour le m fixé en 1.,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$$

Il existe donc $N_\varepsilon > m$ tel que

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \frac{x_1 + \cdots + x_m}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\frac{n-m}{n} \leq 1$, l'inégalité de Cesaro conduit à

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq y_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui permet de conclure.
Pour une suite qui n'est pas positive, on applique le résultat que l'on vient de montrer à la suite des valeurs absolues et on conclut par encadrement avec

$$|y_n| \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{n}.$$

b. Dans le cas où $x_n \to +\infty$, on écrit une autre inégalité à la Cesaro :

$$y_n \geq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{n} + \frac{n-m}{n}\min(x_{m+1}, \cdots x_n).$$

Pour tout réel A :

1. il existe m tel que $k > m \Rightarrow x_k > 2A$, en particulier $\min(x_{m+1}, \cdots x_n) \geq 2A$,
2. comme la suite $\left(\frac{x_1+\cdots+x_m-2mA}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, il existe N_A tel que

$$n \geq N_A \Rightarrow \frac{x_1 + \cdots + x_m - 2mA}{n} \geq -A.$$

Comme $\frac{n-m}{n} > 0$, l'inégalité de Cesaro conduit à

$$n \geq N_A \Rightarrow y_n \geq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{n} + \frac{n-m}{n}2A$$
$$= \frac{x_1 + \cdots + x_m - 2mA}{n} + 2A \geq A$$

ce qui permet de conclure.

c. Pour montrer la croissance, considérons $y_{n+1} - y_n$ en supposant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante.

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= (\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n})(x_1+\cdots+x_n)+\frac{1}{n+1}x_{n+1} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)}\underbrace{(x_1+\cdots+x_n)}_{\leq n x_n}+\frac{1}{n+1}x_{n+1} \\ &\geq \frac{x_{n+1}-x_n}{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

d. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to x$, appliquons le résultat de a. à la suite $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0. Or

$$\frac{(x_1-x)+\cdots+(x_n-x)}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - x.$$

Donc,

$$\left(\frac{(x_1-x)+\cdots+(x_n-x)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0 \Rightarrow \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to x.$$

e. On applique le résultat de la question d. à la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

f. On applique le résultat de la question e. à la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 0 \Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_n \to \ln l$$

(continuité de ln). On termine avec la continuité de *exp* :

$$\frac{1}{n}\ln u_n \to l \Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \to e^l.$$

Contre exemple de l'énoncé pour la réciproque :
La suite $u_n \frac{1}{n}$ converge car

$$u_{2p}^{\frac{1}{2p}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } u_{2p+1}^{\frac{1}{2p+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{2p+1}} \to \sqrt{\frac{2}{3}}$$

mais

$$\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 2 \to 2.$$

g. Toutes les suites sont de la forme $u_n^{\frac{1}{n}}$. On utilise systématiquement le résultat de la question f. en présentant les résultats dans un tableau

u_n	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$	limite
$\binom{2n}{n}$	$2\,\frac{2n+1}{n+1}$	4
$\frac{1\,3\,\cdots\,(2n-1)}{n^n}$	$\frac{2n+1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^n$	$\frac{2}{e}$
$\frac{n\,(n+1)\,\cdots\,(2n)}{n^n}$	$2\,\frac{2n+1}{n}(\frac{n}{n+1})^{n+1}$	$\frac{4}{e}$
$\frac{n^n}{n!}$	$(\frac{n+1}{n})^n$	e

9. pas de correction pour Esc09.tex
10. (Csc10) On note l_2 et l_3 respectivement la limite des carrés et des cubes. Si $l_2 \neq 0$, la suite ne s'annule plus à partir d'un certain rang et on peut considérer

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n^3)_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{u_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{l_3}{l_2}$$

Si $l_2 = 0$, on montre directement avec la définition que

$$(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \to 0 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

11. pas de correction pour Esc11.tex
12. (Csc12) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non majorée.
Notons $i_0 = 0$. Comme la suite n'est pas majorée, il existe un entier naturel $i_1 > i_0$ tel que

$$x_{i_1} > \max(x_{i_0}, 1)$$

On construit ainsi par récurrence une suite d'entiers naturels $i_0 < i_1 < \cdots$. La construction de l'entier suivant i_p étant justifiée par le raisonnement suivant.
Comme la suite n'est pas majorée, l'ensemble des valeurs

$$\{x_k\ k > i_p\}$$

n'est pas majoré non plus donc

$$\max(x_{i_p}, p+1)$$

n'est pas un majorant de cet ensemble. Il existe donc i_{p+1} tel que

$$i_p < i_{p+1} \text{ et } x_{i_{p+1}} \geq \max(x_{i_p}, p)$$

Ceci assure que la suite extraite

$$(x_{i_p})_{p\in\mathbb{N}}$$

est croissante et diverge vers $+\infty$.

13. (Csc13) Montrons que $h < m$.

$$m - h = \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} > 0.$$

On remarque que u_{n+1} et v_{n+1} sont respectivement la moyenne arithmétique et harmonique de u_n et v_n. On en déduit que $v_1 < u_1$ et que cette identité se propage. De plus

$$\begin{aligned} v_n < v_{n+1} < u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n+v_n) \\ &\Rightarrow u_{n+1}-v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_{n+1}-v_{n+1}) \end{aligned}$$

On en déduit que les suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite.

14. pas de correction pour Esc14.tex
15. pas de correction pour Esc15.tex
16. pas de correction pour Esc16.tex
17. pas de correction pour Esc17.tex
18. (Csc13) Suites de Cauchy.

a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel x. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que $\cdots$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} p > N_{\frac{\varepsilon}{2}} \\ q > N_{\frac{\varepsilon}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow |x_p - x_q| \leq |x_p - x| + |x - x_q| \leq \varepsilon$$

Donc la suite est de Cauchy.

b. Supposons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Il existe N_1 tel que

$$\left.\begin{array}{l} p > N_1 \\ q > N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_p - x_q| \leq 1$$

En particulier, pour tout $n \geq N_1$:

$$|x_n| \leq |x_n - x_{N_1}| + |x_{N_1}| \leq 1 + |x_{N_1}|.$$

On a majoré ainsi tous les termes sauf ceux d'indice strictement plus petit que N_1 qui sont en nombre fini. La suite est donc bornée.

c. Supposons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Elle est bornée d'après la question précédente. Le théorème de Bolzano-Weierstrass entraine qu'il existe une partie infinie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(x_n)_{n\in\mathcal{I}}$ converge. Soit x sa limite.
Montrons que la suite complète $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Pour tout $\varepsilon > 0$,
– il existe $N_{c,\frac{\varepsilon}{2}}$ attaché à la propriété de Cauchy,
– il existe $N_{e,\frac{\varepsilon}{2}}$ attaché à la convergence de la suite extraite.
Soit $n \in \mathbb{N}$ plus grand que les deux. Il existe $m \in \mathcal{I}$ tel que $n \leq m$. Alors

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

avec $|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car m et $n \geq N_{c,\frac{\varepsilon}{2}}$,
avec $|x_m - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $m \geq N_{e,\frac{\varepsilon}{2}}$.

19. pas de correction pour Esc19.tex

20. (Csc20) En considérant le début d'un carré :

$$(u_n + \frac{1}{2}v_n)^2 + \frac{3}{4}v_n^2 = u_n^2 + u_nv_n + v_n^2$$

permet de majorer les deux et de conclure par le théorème d'encadrement.

21. pas de correction pour Esc21.tex

22. pas de correction pour Esc22.tex

23. pas de correction pour Esc23.tex

24. (Csc24) Si $|a_i| < 1$, la suite géométrique de raison a_i converge vers 0, on peut donc l'éliminer de la famille sans changer la condition.
Supposons que tous les a_i aient un module ≥ 1. En mettant en facteur celui dont le module est le plus grand, on montre que la limite de la somme ne peut être nulle. La condition proposée par l'énoncé ne peut donc se réaliser que si tous les a_i sont de module strictement plus petit que 1.

25. pas de correction pour Esc25.tex

26. (Csc26) Notons u_n, v_n, w_n les termes d'indices n pour les trois suites proposées. Pour chacune, on forme des inégalités qui permettent de conclure par le théorème d'encadrement ou ses variantes.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sqrt{n^2+k} > n \Rightarrow u_n \leq n\,\frac{1}{n} = 1$$

$$\sqrt{n^2+k} < \sqrt{n^2+2n+1} \Rightarrow u_n > n\,\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq u_n \leq 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 1.$$

Pour v_n, on somme la minoration jusqu'à n^2 :

$$\frac{n^2}{n+1} \leq v_n \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to +\infty.$$

Avec la définition de la partie entière

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(kx-1) < w_n \leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2x$$
$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x - \frac{n(n+1)}{2n^3}$$
$$\leq w_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}x.$$

On en déduit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{x}{3}.$$

27. (Csc27) Indication. Montrer que u_n est de la forme $\alpha_n u_0 + \beta_n u_1$ et préciser α_n et β_n.

28. (Csc28) On remarque d'abord que

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} \Rightarrow u_n \leq v_n.$$

Ensuite :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\underbrace{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}_{>2\sqrt{n+1}}} > 0.$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}_{<2\sqrt{n+1}}} < 0.$$

Enfin,

$$v_n - u_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes.

29. pas de correction pour Esc29.tex

30. pas de correction pour Esc30.tex

31. (Csc31)

a. La fonction f_n

$$\begin{cases} [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n \end{cases}$$

est strictement croissante de 0 à $+\infty$. Le réel $a > 0$ admet donc un unique antécédent x_n. On peut noter que $x_1 = a$.

b. On remarque que

$$f_{n+1}(x_n) = a + x_n^{n+1} > a$$

L'antécédent x_{n+1} de a par f_{n+1} est donc plus petit que x_n. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Elle est minorée par 0 donc elle converge. On note l sa limite.
Comme $f_n(1) = n$, pour n assez grand, on aura $a < f(n)$. Il existe donc un N tel que

$$\forall n \geq N,\ x_n \leq x_N < 1$$

On en déduit que $\left(x_n^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \rightarrow 0$ (majoration par une suite géométrique convergente). En utilisant la formule pour une somme de termes en progression géométrique :

$$a = f_n(x_n) = \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n}$$

Par opérations sur les suites convergentes, on déduit

$$a = \frac{l}{1-l} \Rightarrow l = \frac{a}{1+a}$$

32. pas de correction pour Esc32.tex
33. (Csc33) En introduisant de force les termes pairs au numérateur, on obtient

$$v_n = \frac{\frac{2n(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{n+1} \rightarrow 2$$

34. pas de correction pour Esc34.tex
35. pas de correction pour Esc35.tex