1. (Esf01) Étudier la convergence simple ou uniforme des suites de fonctions.
   - $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0, +\infty[$
   $$\frac{x}{n(1+x^n)}$$
   - $n \in \mathbb{N}$ sur $[0, 1[$,
   $$\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$$
   - $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ puis sur $]0, +\infty[$,
   $$\ln(x+\frac{1}{n})$$
   - $n \in \mathbb{N}$ sur $[0, +\infty[$.,
   $$nx^2e^{-nx}$$
   - $n \in \mathbb{N}$ sur $[0, +\infty[$,
   $$\frac{nx}{1+n^3x^2}$$
   - f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0) = 0$ et
   $$\forall x > 0, \qquad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}.$$
   - f_n est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0) = -1$ et
   $$\forall x > 0, \qquad f_n(x) = \frac{4-(\ln x)^{2n}}{3+(\ln x)^{2n}}$$
   - Sur $\mathbb{R}$,
   $$x^2e^{-\sin\frac{x}{n}}$$
   - $f_n(x)$ est définie par
   $$\begin{array}{rcl} n^2x & , & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2x+2n & , & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & , & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{array}$$
   - f_n est définie dans $]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$
   $$\inf(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$$
   - f_n est définie dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = 0$ en dehors de $[-n, n]$ et
   $$f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n$$
   dans $[-n, n]$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions sur $[0, +\infty]$.
2. (Esf02) Montrer que, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications croissantes sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, alors f est croissante.
3. (Esf03) Soit X un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur X vers une application f. Montrer que
   $$(\frac{f_n}{1+f_n^2})_{n\in\mathbb{N}}$$
   converge uniformément vers
   $$\frac{f}{1+f^2}$$
   GÃ©nÃ©raliser.
4. (Esf04) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications définies dans $[0, 1]$ par
   $$\begin{array}{rcl} P_0 & = & 0 \\ P_{n+1}(x) & = & P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2) \end{array}$$
   a. Vérifier que pour tout entier n et tout x dans $[0, 1]$,
   $$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$$
   b. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers l'application racine carrée.
5. (Esf05) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications bornées qui converge uniformément vers une fonction f. Montrer que la suite $(e^{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que la suite $(e^{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e^f.
6. (Esf06) Théorème d'approximation de Weierstrass.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$ et $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
   On se donne aussi des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ mutuellement indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre x. On note
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Z_n = \frac{1}{n}S_n, \quad B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$$
   a. Quelle est la loi de S_n ? Préciser
   $$E(S_n), \quad V(S_n), \quad E(Z_n), \quad V(Z_n)$$
   b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, montrer que
   $$\forall \alpha > 0 : \sum_{|\frac{k}{n}-x|\geq\alpha} \binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$
   c. Montrer que
   $$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right)$$
   d. En déduire, en utilisant le théorème de Heine que la suite de fonctions $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers f dans $[0, 1]$.

1. pas de correction pour Esf01.tex
2. pas de correction pour Esf02.tex
3. pas de correction pour Esf03.tex
4. pas de correction pour Esf04.tex
5. pas de correction pour Esf05.tex
6. (Csf06)

a. La variable S_n suit une loi binomiale de paramètres n et x. Avec le cours :

$$E(S_n) = nx,\ V(S_n) = nx(1-x),\ E(Z_n) = x,\ V(Z_n) = \frac{x(1-x)}{n}$$

b. On applique l'inégalité de Bienaymé-Chebychev à la variable Z_n :

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - x|\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

car il est bien connu que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour x entre 0 et 1. En interprétant S_n comme le nombre d'éléments d'une partie aléatoire d'un ensemble à n éléments, l'événement $(|Z_n - x|)$ est réalisé pour les tirages de parties à k éléments avec $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha$. On en déduit

$$\mathbb{P}\left(|Z_n - x|\right) = \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha} \binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k}$$

c. La formule de transfert montre que

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$$

On obtient la formule demandée en soustrayant à cette relation le développement du binôme de

$$f(x) = \left(x + (1-x)\right)^n f(x)$$

d. D'après le théorème de Heine appliqué à la fonction continue f dans le segment $[0,1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (u,v) \in [0,1]^, \ |u - v| \leq \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit pour chaque $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4n\alpha^2}$$

en séparant les k selon que $\frac{k}{n}$ est proche ou loin de x et en majorant avec les inégalités déjà introduites. Comme la majoration est valable pour tous les x :

$$N_\infty\left(B_n(f) - f\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4n\alpha^2}$$

On termine avec le raisonnement usuels en deux étapes successives.