1. (Esl01) Le paramètre m et les inconnues x, y, z sont complexes. Discuter et résoudre les systèmes

$$(1)\ \begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ \overline{m}x+y+mz=0 \\ \overline{m}^2x+\overline{m}y+z=0 \end{cases},$$

$$(2)\ \begin{cases} x-my+m^2z=2m \\ mx-m^2y+mz=2m \\ mx+y-m^2z=1-m \end{cases}.$$

2. (Esl02) Résoudre les systèmes

$$(1)\ \begin{cases} x_1+x_2 = a \\ x_3+x_4=b \\ x_1+x_2+x_3+x_4=c \\ x_3+x_4=d \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14 \end{cases}$$

3. (Esl03) Discuter suivant les paramètres de l'existence et du nombre de solutions des systèmes aux inconnues (x,y,z).

$$(1)\ \begin{cases} -2x+y+2z=a \\ -x+2y+2z=b \\ -2x+2y+3z=c \end{cases},\quad (2)\ \begin{cases} ax+y+z=\alpha \\ x+ay+z=\beta \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases},\quad (4)\ \begin{cases} \alpha x+y+z+t=1 \\ x+\alpha y+z+t=\beta \\ x+y+\alpha z+t=\beta^2 \\ x+y+z+\alpha t=\beta^3 \end{cases}$$

Pour le système (4), on pourra additionner les lignes.

4. (Esl04) Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$(1)\ \begin{cases} x+2z=1 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+6z=3 \end{cases}\quad (2)\ \begin{cases} 3x+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+4z=3 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x+2y+4z=12 \\ 5x+y-3z=0 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}\quad (4)\ \begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \\ x+3y-13z=-6 \end{cases}$$

5. (Esl05) Soit $\alpha \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}$. Discuter de l'existence de solutions du système

$$\begin{cases} x+y\cos\alpha+z\cos 2\alpha=a \\ x\cos\alpha+y\cos 2\alpha+z\cos 3\alpha=b \\ x\cos 2\alpha+y\cos 3\alpha+z\cos 4\alpha=c \end{cases}$$

6. (Esl06) Soit λ, μ, γ, δ des nombres complexes tels que $\lambda\neq\mu$ et $\gamma\delta\neq 0$. On définit des fonctions g et g' de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} g(t)=\gamma e^{\lambda t}+\delta e^{\mu t} \\ g'(t)=\gamma\lambda e^{\lambda t}+\delta\mu e^{\mu t}. \end{cases}$$

Pour tous α et β complexes, on définit f par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\alpha e^{\lambda t}+\beta e^{\mu t}.$$

En utilisant les formules de Cramer, exprimer des complexes K et K' tels que

$$f=Kg+K'g'.$$

7. (Esl07) Soit a et b réels fixés. En utilisant ce que vous savez des suites arithmético-géométriques

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=au_n+b,$$

étudier le système

$$\begin{cases} x_2=ax_1+b \\ x_3=ax_2+b \\ \vdots \\ x_n=ax_{n-1}+b \\ x_1=ax_n+b \end{cases}.$$

8. (Esl08) En considérant

$$x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} (a+1)x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=a^2+na \\ x_1+(a+1)x_2+x_3+\cdots+x_n=a^3+na^2 \\ \vdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+(a+1)x_n=a^{n+1}+na^n \end{cases}.$$

1. (Csl01) En présence d'un paramètre, la multiplication d'une équation par une expression contenant le paramètre n'est pas une opération élémentaire et ne conserve pas l'ensemble des solutions. On ne doit pas utiliser ce genre de transformation.
Système (1).
En utilisant $L_3 \leftarrow L_3 - \overline{m}L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - \overline{m}L_1$, on obtient un système triangulaire équivalent
$$\begin{cases} x + my & +m^2z = 0 \\ (1-|m|^2)y & +m(1-|m|^2)z = 0 \\ & (1-|m|^2)z = 0 \end{cases}$$
Si $|m| \neq 1$, le système admet une unique solution. Si $|m| = 1$, le système est équivalent àla seule équation
$$x + my + m^2z = 0.$$
Système (2).
En utilisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, on obtient un système triangulaire équivalent
$$\begin{cases} x- & my+m^2z & = 2m \\ & (1+m^2)y-m^2(1+m)z & = 1-m-2m^2 \\ & (m-m^3)z & = 2m-2m^2 \end{cases}$$
On présente les ensembles de solutions dans les différents cas après calculs.
Si $m \notin \{i, -i, 0, 1, -1\}$,
$$\left\{ \left(\frac{m(3+m^2)}{(1+m^2)(1+m)}, \frac{1-m}{1+m^2}, \frac{2}{1+m} \right) \right\}.$$
Si $m = 0$.
$$\{(0, 1, t), t \in \mathbb{C}\}.$$
Si $m = 1$.
$$\{(1, t-1, t), t \in \mathbb{C}\}.$$
Si $m \in \{i, -i-1\}$, pas de solution.

2. (Csl02) Équation (1).
Opérations $L3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$.
Le système est équivalent à
$$\begin{cases} x_1+x_2 & = a \\ x_3+x_4 & = b \\ 0 & = c-a-b \\ 0 & = d-b \end{cases}$$
– Si $b - d \neq 0$ ou $c - a - b \neq 0$, pas de solution.
– Sinon les solutions sont
$$(a-\lambda, \lambda, b-\mu, \mu) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
Équation (2). En ajoutant toutes les équations, on obtient
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
que l'on soustrait à toutes les autres. On obtient le système équivalent :
$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4 = 6 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 7 \\ 2x_1+3x_2+x_4 = 8 \\ 3x_1+x_3+2x_4 = 9 \end{cases}$$
Opérations : $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$.
$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_4 = 6 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 7 \\ -x_2-6x_3+x_4 = -6 \\ -6x_2-8x_3+2x_4 = -12 \end{cases}$$
Opération $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$
$$-4x_2 + 4x_3 = 0.$$
Opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$:
$$-4x_3 + 4x_4 = 0.$$
On en déduit $x_2 = x_3 = x_4$ et il existe une unique solution
$$(2, 1, 1, 1).$$

3. (Csl03) Système (1).
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = b \\ -3x - 2z = a - 2b \\ -3y + z = c - 2b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = b \\ -3y - 2z = a - 2b \\ -2y - z = c - 2b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 2y = b \\ -z - 2y = c - 2b \\ y = a + 2b - 2c \end{cases}$$
Le système (1) admet donc toujours une unique solution.
Système (2).
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} z+ & ax+ & y = \alpha \\ & (1-a)x+(a-1)y & = \beta - \alpha \end{cases}$$
– Si $a \neq 1$, les solutions sont
$$\left(\lambda + \frac{\beta-\alpha}{a-1}, \lambda, -a(\lambda + \frac{\beta-\alpha}{a-1}) - \lambda + \alpha \right) \lambda \in \mathbb{R}.$$
– Si $a = 1$ et $\alpha \neq \beta$ pas de solution.
– Si $a = 1$ et $\alpha = \beta$, le système est équivalent à l'unique équation
$$x + y + z = \alpha.$$
Système (3). On va montrer que si a, b, c sont deux à deux distincts, le système admet un unique triplet solution.
Opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis on divise L_2 par $b - a$ et L_3 par $c - a$.
$$\begin{cases} x+ay+ & a^2z = a^3 \\ & y+(a+b)z = b^2+ab+a^2 \\ & y+(c+b)z = b^2+cb+c^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+ & a^2z = a^3 \\ & y+(a+b)z = b^2+ab+a^2 \\ & (c-a)z = (c-a)(a+b+c) \end{cases}.$$

On en déduit $z = a+b+c$, $x = abc$, $y = -(ab+bc+ca)$.
Système (4).
Ne pas utiliser l'algorithme de Gauss mais ajouter toutes les lignes :

$$(3+\alpha)(x+y+z+t) = 1+\beta+\beta^2+\beta^3.$$

Pour $\alpha + 3 \neq 0$, notons

$$S = \frac{1+\beta+\beta^2+\beta^3}{\alpha+3}$$

Le système admet une unique solution car il est équivalent à

$$\begin{cases} (\alpha-1)x + S = 1 \\ (\alpha-1)y + S = \beta \\ (\alpha-1)z + S = \beta^2 \\ (\alpha-1)t + S = \beta^3 \end{cases}$$

4. (Csl04) Système (1). Unique solution

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Système (2). Par opérations élémentaires équivalent à

$$\begin{cases} 2y+5x \quad = 1 \\ \quad 3x+2z = 2 \\ -2y+\ x+4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+5x \quad = 1 \\ \quad 3x+2z = 2 \\ \quad 6x+4z = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+5x \quad = 1 \\ \quad 3x+2z = 2 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}.$$

Solutions :

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, 0\right) + \lambda\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Système (3). Unique solution

$$(2, -1, 3).$$

Système (4). Par opérations élémentaires équivalent à

$$\begin{cases} y+3x-\ 5z = 0 \\ -y+2x+\ 3z = 3 \\ -y+4x+\quad z = 3 \\ 3y+\ x-13z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3x-5z = 0 \\ 5x-2z = 3 \\ 7x-4z = 3 \\ -8x+2z = -6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-5z+3x = 0 \\ -2z+5x = 3 \\ -4z+7x = 3 \\ 2z-8x = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-5z+3x = 0 \\ z-4x = -3 \\ -2z+5x = 3 \\ -4z+7x = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-5z+3x = 0 \\ z-4x = -3 \\ -3x = -3 \\ -9x = -9 \end{cases}$$

Unique solution

$$(1, 2, 1).$$

5. (Csl05) On utilise la formule

$$\cos((p+q)\alpha) = \cos(q\alpha)\cos(q\alpha) - \sin(q\alpha)\sin(q\alpha).$$

Après les opérations

$$L2 \leftarrow L_2 - \cos(\alpha)L_1, L3 \leftarrow L_3 - \cos(2\alpha)L_1,$$

on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} x+y\cos(\alpha) \quad +z\cos(2\alpha) \quad = a \\ -y\sin^2(\alpha) \quad +z\sin(2\alpha)\sin(\alpha) = b - a\cos(\alpha) \\ -y\sin(2\alpha)\sin(\alpha) + z\sin^2(2\alpha) \quad = c - a\cos(2\alpha) \end{cases}$$

Comme $\alpha \not\equiv 0 \mod \frac{\pi}{2}$, on peut diviser par $\sin(\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$:

$$\begin{cases} x+y\cos(\alpha)+z\cos(2\alpha) = a \\ -y \quad +2z\cos(\alpha) = \dfrac{b - a\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \\ -y \quad +2z\cos(\alpha) = \dfrac{c - a\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)\sin(\alpha)} \end{cases}$$

Le système admet des solutions si et seulement si

$$2\cos(\alpha)(b - a\cos(\alpha)) = c - a\cos(2\alpha)$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^2(\alpha) - \cos(2\alpha))a - 2\cos(\alpha)b + c = 0$$
$$\Leftrightarrow a - 2\cos(\alpha)b + c = 0.$$

6. (Csl06) En combinant les définitions, on montre qu'il suffit que K et K' vérifient

$$\begin{cases} \gamma K + \gamma\lambda K' = \alpha \\ \delta K + \delta\mu K' = \beta \end{cases}.$$

Il s'agit d'un système de Cramer de déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \gamma & \gamma\lambda \\ \delta & \delta\mu \end{vmatrix} = \gamma\delta(\mu - \lambda).$$

D'après les formules de Cramer,

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma\lambda \\ \beta & \delta\mu \end{vmatrix}}{D} = \frac{\alpha\delta\mu - \beta\gamma\lambda}{\gamma\delta(\mu-\lambda)},$$
$$K' = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{D} = \frac{\gamma\beta - \delta\alpha}{\gamma\delta(\mu-\lambda)}.$$

7. pas de correction pour Esl07.tex
8. pas de correction pour Esl08.tex