1. (Esn01) Étudier si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes :
$$\frac{\cos^2 n}{n^2},\quad \frac{n+1}{n^3+1},\quad \ln(n^2+2)-2\ln n,$$
$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n^2}, n^4e^{-n},\quad \left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}},\quad e^{-\sqrt{n}},$$
$$n^{\frac{1}{n^2}}-1,\quad \frac{1}{n(\ln n)^2},\quad \frac{\ln n}{n^2},\quad \frac{1}{1+2^n},\quad \frac{\ln n}{n2^n},$$
$$\frac{1}{1+2^{-n}},\quad (\operatorname{ch}(\sqrt{\ln n})^{-2},\quad \frac{1}{\ln(n!)},$$
$$\frac{\ln(n!)}{n^a} \text{ avec } a\in\mathbb{R}$$
2. (Esn02) Montrer que la série de terme général
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$
est divergente.
3. (Esn03) Former une série $\sum u_n$ telle que
$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$$
soit la somme partielle d'indice n de $\sum u_n$. Chercher un équivalent de u_n et en déduire la convergence de x_n (sa limite est la constante γ d'Euler).
4. (Esn04) Nature des séries de terme généraux
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx,\qquad \int_0^1\frac{x^{n^2}}{1+x}\,dx$$
5. (Esn05) Soit a et b positifs ou nuls. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note
$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k^2+a}{k^2+b}$$
Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre strictement positif.
6. (Esn06) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante à valeurs strictement positives telle que $\sum x_n$ converge.
Montrer que $(nx_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. En déduire la nature des séries de termes généraux nx_n^2, $x_n(1+x_n)^n$.
7. (Esn07) Dans cet exercice, on utilise le résultat
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\to\gamma$$
démontré dans l'exercice 3. Pour n entier non nul, on note
– h_n la somme des inverses des n premiers entiers.
– i_n la somme des inverses des n premiers impairs.
– p_n la somme des inverses des n premiers pairs.
On imagine que les entiers pairs et impairs sont stockés dans deux distributeurs d'où on les tire en ajoutant chaque fois l'inverse du nombre tiré. Chaque fois que l'on tire un nombre pair, il est multiplié par -1.
On fixe des entiers p et q et on procède à des séquences de $p+q$ tirages : q nombres impairs puis p nombres pairs. On note d_n la somme obtenue après n séquences. Exprimer d_n en fonction de i_n et p_n puis en fonction de plusieurs h_i seulement. En déduire que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
8. (Esn08) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. On pose
$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$$
Montrer que
$$\sum v_n \text{ converge},\quad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\leq 1 \text{ et}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \Leftrightarrow \left(\sum u_n\right)_n \text{ diverge}$$
9. (Esn09) Soient u_n et v_n les termes généraux positifs de deux séries convergentes. Montrer que les séries de termes généraux $\max(u_n,v_n)$, u_n^2 et $\sqrt{u_nv_n}$ sont convergentes.
10. (Esn10) On note
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\qquad v_n = u_n+\frac{1}{n}$$
Montrer que $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge et $u_n\sim v_n$.
11. (Esn11) Discuter suivant p entier de la convergence de la série de terme général
$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$$
12. (Esn12) Étudier la convergence de la série de terme général u_n avec
$$u_n = \begin{cases}\dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré d'entier}\\ \dfrac{1}{n^2} \text{ sinon}\end{cases}$$
13. (Esn13) Montrer la convergence puis calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n},\quad \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^3-n},\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right),$$
$$\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n},\quad \sum_{n\geq 0}(3+(-1)^n)^{-n},$$
$$\sum_{n\geq 1}\ln(\cos\frac{x}{2^n}) \text{ pour } 0<x<\frac{\pi}{2}$$
14. (Esn14) Déterminer des réels a et b pour que la série de terme général
$$u_n = \sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$$
converge et calculer alors la somme. Mêmes questions avec
$$v_n = \ln n + a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$$

Rémy Nicolai _fex_snpdf du 23 juin 2019

15. (Esn15) On considère deux séries à termes positifs de terme général u_n et v_n. On suppose que la série de terme général v_n converge et que

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

16. (Esn16) Discuter suivant les valeurs des paramètres des convergences des séries de terme général

$$\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - a - \frac{b}{n} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^{Cn^\lambda} \qquad C>0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{-n^\beta} \qquad \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}$$

17. (Esn17) Équivalence de sommes partielles divergentes par un encadrement « à la Cesaro ».
Soit $\sum a_k$ et $\sum b_k$ deux séries à termes positifs *divergentes* telles que $a_n \sim b_n$. On note

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } n \geq N \Rightarrow$$
$$(1-\frac{\varepsilon}{2})A_n - A_N \leq B_n \leq (1+\frac{\varepsilon}{2})A_n + B_N$$

En déduire $A_n \sim B_n$.

18. (Esn18) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\beta}})$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Montrer que $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En déduire l'existence d'un réel v tel que $u_n \sim \frac{v}{n^\alpha}$.
Que peut-on en conclure quant à la convergence de la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de α ?

19. (Esn19) Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série absolument convergente et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose

$$v_n = u_{\sigma}(n)$$

Montrer que $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et de même somme sur $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. (Esn20) Soit $(\sum u_n)_n$ série à termes positifs convergente. Montrer que $\left(\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}\right)_n$ est convergente.

21. (Esn21) Équivalence de sommes partielles divergentes par comparaison avec une intégrale.
Soit $n_0\in\mathbb{N}$ et f une fonction définie dans $[n_0, +\infty[$, continue, décroissante vers 0 et dont la primitive F (nulle en n_0) diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.
On pose $u_n = f(n)$. Montrer que $(\sum u_n)_{n\geq n_0}$ est divergente et que

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim F(n)$$

22. (Esn22) Transformation d'Abel. Critère d'Abel.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre rééls décroissante vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la suite des sommes partielles

$$\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

soit bornée. Montrer que la série $(\sum u_k v_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

23. (Esn23) Déterminer la limite de la suite

$$\left(\sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{\pi}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

24. (Esn24) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres >0 pour laquelle

$$\exists\alpha>1,\ \exists\lambda>0 \text{ tq } u_{n+1}-u_n \sim -\lambda u_n^\alpha.$$

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et qu'elle converge vers 0.
b. Soit $\beta\in\mathbb{R}$. En considérant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, chercher un équivalent de

$$v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta.$$

Pour quel β la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente-t-elle vers une limite non nulle ? Que dire alors de la série $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
c. On admet le résultat suivant (ex 17 Esn17)

$$\left.\begin{array}{r}(v_n),(w_n)>0\\ v_n\sim w_n\\ (\sum v_n) \text{ diverge}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} w_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Déterminer un équivalent à la suite (u_n).
d. Déterminer un équivalent à la suite (x_n) définie par

$$0 < x_0 < \frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1} = \sin x_n.$$

25. (Esn25) Séries d'intégrales de Wallis.
On rappelle la définition des intégrales de Wallis et la formule de Stirling

$$\forall n\in\mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$$
$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

a. En utilisant une intégration par parties, former une relation entre W_{n+2} et W_n. En déduire un équivalent de W_n (pour n pair) et la divergence de $(\sum W_n)_{n\geq 0}$.
b. Montrer que

$$\forall\alpha\in\,]0,1[,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}t}{1+\cos t}\,dt \leq \alpha + \frac{\pi}{2}\cos^{n+1}\alpha.$$

c. Montrer que $(\sum(-1)^n W_n)_{n\geq 0}$ converge et préciser sa somme.

26. (Esn26) Soit $a > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{S_n} \quad \text{avec } S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{nx_n} \qquad (1)$$
$$x_n^2 \geq a^2 + 2\ln n \qquad (2)$$
$$S_n \geq a + \int_1^n \sqrt{2\ln x}\, dx \qquad (3)$$

b. Former un équivalent en $+\infty$ d'une primitive de $\sqrt{2\ln x}$.

c. On admet le résultat suivant

$$\left.\begin{aligned} (v_n), (w_n) > 0 \\ v_n \sim w_n \\ (\sum v_n) \text{ diverge} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} w_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

En déduire

$$x_n \sim \sqrt{2\ln n}.$$

27. (Esn27) Produit de Cauchy.
Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries absolument convergentes. On définit la série $(\sum w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Montrer que $(\sum w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

1. pas de correction pour Esn01.tex
2. pas de correction pour Esn02.tex
3. pas de correction pour Esn03.tex
4. (Csn04) Il s'agit de séries à termes positifs.
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geq \int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx = \frac{1}{2(n+1)}$$
La série est divergente car minorée par une série divergente usuelle.
$$\int_0^1 \frac{x^{n^2}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{n^2}\,dx = \frac{1}{n^2+1}$$
La série est convergente car majorée par une série convergente usuelle.
5. (Csn05) Quitte à considérer la suite inverse, on peut supposer $a > b$. On aurait $P_n = 1$ si $a = b$.
Alors $\ln P_n$ est la somme partielle de la série de terme général
$$u_k = \ln(k^2+a) - \ln(k^2+b) > 0.$$
On peut utiliser un développement limité pour conclure quant à la convergence :
$$u_k = \frac{a-b}{k^2} + o(\frac{1}{k^2}).$$
La série en $\frac{1}{k^2}$ est convergente donc celle en u_k aussi. La suite P_n converge vers l'exponentielle de la somme qui est strictement positive.
6. (Csn06) Il s'agit d'un raisonnement « à la Césaro ».
Fixons un entier m et considérons des entiers $n > m$. Comme la suite est décroissante,
$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k \geq (n-m)x_n \Rightarrow nx_n \leq \sum_{k=m+1}^{n} x_k + mx_n$$
Comme la série $(\sum x_k)$ est convergente, on peut majorer par le reste de la série :
$$nx_n \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} x_k + mx_n$$
La suite des restes tend vers 0 donc
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } \sum_{k=m+1}^{+\infty} x_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
Pour ce m fixé, la suite $(mx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Rightarrow mx_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
On en déduit
$$n \geq N \Rightarrow nx_n \leq \varepsilon$$
7. (Csn07) Par définition :
$$d_1 = \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2q-1}}_{q \text{ nbs impairs}} - \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p}}_{p \text{ nbs pairs}}\right)$$
$$\begin{aligned} d_n &= \underbrace{i_{nq}}_{nq \text{ premiers impairs}} - \underbrace{p_{nq}}_{nq \text{ premiers pairs}} \\ &= h_{2nq} - p_{nq} - p_{np} = h_{2nq} - \frac{h_{nq}+h_{np}}{2} \end{aligned}$$
Introduisons une suite ε_n qui tend vers 0 pour traduire la propriété admise par l'énoncé :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$
Les γ disparaissent de l'expression de d_n :
$$\begin{aligned} d_n &= \ln(2nq) - \frac{\ln(nq)+\ln(np)}{2} + \varepsilon_{2nq} - \frac{\varepsilon_{np}+\varepsilon_{nq}}{2} \\ &= \ln 2 + \ln\sqrt{\frac{q}{p}} + \underbrace{\varepsilon_{2nq} - \frac{\varepsilon_{np}+\varepsilon_{nq}}{2}}_{\to 0} \\ &\to \ln 2 + \ln\sqrt{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$
8. pas de correction pour Esn08.tex
9. pas de correction pour Esn09.tex
10. pas de correction pour Esn10.tex
11. pas de correction pour Esn11.tex
12. pas de correction pour Esn12.tex
13. (Csn13) Calcul de sommes.
Pour chaque cas, la convergence vient de ce que l'on peut exprimer la somme partielle comme une suite pour laquelle la limite résulte des propriétés usuelles sur les suites convergentes.
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$
   - $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-n}$
   - Le terme général tend vers 0 et la somme du terme d'indice n (pair) et du suivant est nulle.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$
   - Ici aussi, le terme général tend vers 0. On peut factoriser les polynômes $(n+1)(n+2)$ et $n(n+3)$ et simplifier les logarithmes en dominos.
$$\sum_{n\geq 1} \ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = 2\ln 3$$
   - Cette fois, il s'agit d'une combinaison de suites géométriques de raison $\frac{1}{16}$ (pairs) et $\frac{1}{4}$ (impairs) :
$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots \\ &\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{16}{15} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

– Cette fois, il s'agit plutôt de dominos multiplicatifs. Introduisons

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} \\ \cos\frac{x}{2^k} &= \frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{x}{2^k}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_n = 2^{-n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tout est positif. Comme $\sin u \sim u$ en 0. On obtient

$$\sum_{n\geq 1} \ln(\cos\frac{x}{2^n}) = \ln\frac{\sin x}{x}.$$

14. (Csn14) Formons un développement limité de u_n :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \\ &= (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}). \end{aligned}$$

Si la série $\sum u_n$ converge, son terme général tend vers 0 donc

$$1+a+b = 0.$$

Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, si la série $\sum u_n$ converge, alors

$$a+2b=0.$$

En résolvant le système, on trouve que $\sum u_n$ converge entraine

$$a=-2, \qquad b=1.$$

Pour ces valeurs de a et b, la suite des sommes partielles se simplifie par télescopage.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \\ &= \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right) \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k &= -1 - \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right) = -1 + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = -1. \end{aligned}$$

15. (Csn15) La condition se traduit par une décroissance qui permet une domination :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n} &\Rightarrow \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}} \leq \frac{u_n}{v_n} \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \leq \begin{cases} \frac{u_0}{v_0} \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{u_1}{v_1} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow u_n \leq M v_n \end{aligned}$$

avec $M = \max(\frac{u_0}{v_0}, \frac{u_1}{v_1})$. La convergence de $\sum v_n$ entraîne alors celle de $\sum u_n$.

16. pas de correction pour Esn16.tex

17. (Csn17) Choisissons un N arbitraire et coupons la somme partielle en N :

$$\forall n > N,\ B_n = B_N + \sum_{k=N+1}^{n} b_k.$$

Choisissons le N en utilisant l'équivalence des termes généraux :

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } k \geq N \\ &\qquad \Rightarrow (1-\frac{\varepsilon}{2})a_k \leq b_k \leq (1+\frac{\varepsilon}{2})a_k. \end{aligned}$$

On en déduit

$$B_N + (1-\frac{\varepsilon}{2})\sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq B_n \leq B_N + (1+\frac{\varepsilon}{2})\sum_{k=N+1}^{n} a_k.$$

On exprime les sommes avec des A_i :

$$\sum_{k=N+1}^{n} a_k = A_n - A_N.$$

On en déduit

$$B_N - (1-\frac{\varepsilon}{2})A_N + (1-\frac{\varepsilon}{2})A_n \leq B_n \leq B_N - (1+\frac{\varepsilon}{2})A_N + (1+\frac{\varepsilon}{2})A_n.$$

Comme les séries sont à termes positifs, on conclut avec

$$\begin{aligned} -A_N \leq & B_N - (1-\frac{\varepsilon}{2})A_N \\ & B_N - (1+\frac{\varepsilon}{2})A_N \leq B_N. \end{aligned}$$

Divisons cet l'encadrement par A_n :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}) - \frac{A_N}{A_n} \leq \frac{B_n}{A_n} \leq (1+\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{B_N}{A_n}$$

Comme A_n diverge vers $+\infty$, pour n assez grand,

$$\frac{A_N}{A_n} \text{ et } \frac{B_N}{A_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui montre (définition de la convergence) que

$$\frac{B_n}{A_n} \to 1 \Leftrightarrow B_n \sim A_n.$$

18. pas de correction pour Esn18.tex

19. (Csn19) Notons

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Comme σ est une bijection, il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} |v_k| = \sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

On en déduit l'absolue convergence de $(\sum v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour montrer que l'égalité des sommes, considérons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = \min\{k \text{ tq } [\![0,n]\!] \subset \sigma([\![0,k]\!])\}$$

On peut conclure avec

$$|V_{\varphi_n} - U_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$$

20. (Csn20) Majorer les sommes partielles à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
21. pas de correction pour Esn21.tex
22. (Csn22) On note

$$\forall n \in \mathbb{N} V_n \ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Par hypothèse, il existe $V > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |V_n| \leq V.$$

Effectuons une transformation d'Abel en écrivant $v_k = V_k - V_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et $v_0 = V_0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= u_0 V_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_{n+1} V_n\end{aligned}$$

La suite $(u_{n+1} V_n)$ converge vers 0 car (u_n) converge vers 0 et (V_n) est bornée. La série $(\sum (u_k - u_{k+1}) V_k)$ est *absolument* convergente car

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |(u_k - u_{k+1}) V_k| &= \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) |V_k| \\ &\leq V \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \leq V u_0\end{aligned}$$

car la suite (u_n) est décroissante.

23. (Csn23) On peut écrire

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + r_n \text{ avec } r_n \in O(\frac{1}{n^3}).$$

On interprète la somme des $\frac{\pi}{k}$ comme une somme de Riemann. La série de terme général r_n est absolument convergente donc la somme associée converge vers 0. La limite cherchée est donc

$$\pi \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \pi \ln 2.$$

24. (Csn24)à compléter
25. pas de correction pour Esn25.tex
26. (Csn26)

a. Inégalité 1.
La suite est croissante et positive donc

$$\begin{aligned}(\forall k \leq n, \ x_k \leq x_n) &\Rightarrow S_n \leq n x_n \\ &\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{n x_n}.\end{aligned}$$

Inégalité 2.
On écrit x_n^2 comme une somme et on utilise la comparaison somme-intégrale dans le cas décroissant. On commence par élever au carré :

$$\begin{aligned}(1) \Rightarrow x_{n+1}^2 \geq x_n^2 + \frac{2}{n} \Rightarrow x_n^2 - a^2 &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k} \\ &\geq \int_1^n \frac{2}{t} \, dt = 2 \ln n.\end{aligned}$$

Inégalité 3.
De l'inégalité (2), on tire $x_n \geq \sqrt{2 \ln n}$ pour $n \geq 2$. On en déduit une minoration de S_n que l'on minore encore par comparaison somme-intégrale cette fois dans le cas croissant.

$$S_n \geq a + \sum_{k=2}^{n} \sqrt{2 \ln k} \geq a + \int_1^n \sqrt{2 \ln t} \, dt.$$

b. Notons F la primitive nulle en e. Pour obtenir un équivalent, on utilise une intégration par parties (à partir de e pour éviter les problèmes en 0).

$$\int_e^x \sqrt{2 \ln t} \, dt = \left[t \sqrt{2 \ln t} \right]_0^x - \int_e^x \frac{dt}{\sqrt{2} (\ln t)^{\frac{3}{2}}}$$

Comme la fonction ln est croissante

$$0 \leq \int_e^x \frac{dt}{\sqrt{2} (\ln t)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{x}{\sqrt{2} (\ln t)^{\frac{3}{2}}} \in o(x \sqrt{\ln x}).$$

On en déduit

$$F(x) \sim 2 \sqrt{x \ln x}.$$

c. Notons

$$w_n = \frac{1}{a + \int_1^n \sqrt{2 \ln t} \, dt}.$$

De sorte que $\frac{1}{S_n} \leq w_n$ par l'inégalité (3) et, par définition

$$x_{n+1} - x_n \leq w_n \Rightarrow x_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} w_k.$$

On a donc un encadrement

$$\sqrt{2 \ln n} \leq x_n \leq a + \sum_{k=1}^{n-1} w_k \qquad (E).$$

D'après la question b.,

$$w_n \sim \frac{1}{n \sqrt{2 \ln n}}$$

D'après le résultat admis,

$$\sum_{k=1}^{n-1} w_k \sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \sqrt{2 \ln n}}.$$

Par comparaison somme-intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \sqrt{2 \ln n}} \sim \int_2^n \frac{dt}{t \sqrt{2 \ln t}}.$$

Or

$$\int_2^n \frac{dt}{t \sqrt{2 \ln t}} = \left[\sqrt{2 \ln t} \right]_2^n \sim \sqrt{2 \ln n}.$$

En divisant l'encadrement (E) par $\sqrt{2 \ln n}$, on obtient que $x_n \sim \sqrt{2 \ln n}$.

27. (Csn27) Le point fondamental est l'inclusion entre trois parties de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = \left\{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \text{ tq } i+j \leq n\right\} \\ \subset \mathcal{C}_n = [\![0,n]\!]^2 \subset \\ \mathcal{T}'_n = \left\{(i,j) \in [\![0,2n]\!]^2 \text{ tq } i+j \leq 2n\right\}. \end{aligned}$$