1. (Esr01) Étudier, suivant la valeur de u_0, la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$$
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 + 7u_n)} - 1$$
$$u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$$
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{1 + u_n^2}}$$
$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^3 + \frac{1}{4}u_n$$

2. (Esr02) **Récurrence homographique**
Les suites considérées ici sont à valeurs complexes.
Soit a, b, c, d des nombres complexes tels que $c \neq 0$ et $\delta = ad - bc \neq 0$. On considère une fonction homographique f définie dans $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ par :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ainsi que l'équation du second degré en x :

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{E}$$

caractérisant les points fixes de f. Dans toute la suite, on supposera que une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence homographique ; c'est à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} = f(u_n)$$

a. Montrer que

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{\delta}{c(cx + d)}$$

En déduire des expressions factorisées pour $f(x) - f(y)$ et $f'(x)$ (avec x réel dans le dernier cas).

b. Dans cette question, on suppose que (E) admet deux racines distinctes α et β. On définit g_n par :

$$g_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

i. Montrer que, si $u_0 \neq \beta$, alors $u_n \neq \beta$ pour tout n. Montrer que $(g)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser la raison.

ii. Exprimer u_n en fonction de g_n.
Quels sont les comportements possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

iii. Ici, a, b, c, d sont réels et les deux points fixes sont réels. Calculer $f'(\alpha)f'(\beta)$.

c. Dans cette question, on suppose que (E) admet une racine double α. On définit a_n par :

$$a_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$$

i. Montrer que, si $u_0 \neq \alpha$, alors $u_n \neq \alpha$ pour tout n et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

ii. Exprimer u_n en fonction de a_n, en déduire sa limite.

d. Exemples.

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}, u_{n+1} = \frac{7u_n - 12}{3u_n - 5}, u_{n+1} = \frac{1}{1 - u_n}$$

Dans le dernier exemple, comparer u_{n+3} avec u_n.

3. (Esr03) **Applications contractantes**
On dira qu'une application est contractante lorsqu'elle est lipschitzienne de rapport k avec $0 < k1$. On considère ici une application contractante définie dans un intervalle stable I fermé.
Par intervalle *fermé*, on désigne un intervalle de la forme

$$\mathbb{R},\ ]-\infty, a],\ [a, +\infty[,\ [a, b]$$

On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = f(x_n)$$

avec une condition initiale x_0 quelconque dans I.

a. Montrer que f admet au plus un point fixe.

b. On introduit les notations suivantes :

$$u_n = |x_{n+1} - x_n|, \quad U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{u_0}{1-k}$.

c. On pose de plus[1]

$$a_n = (x_{n+1} - x_n)_+, \quad A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$b_n = (x_{n+1} - x_n)_-, \quad B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$

Montrer que les deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. En déduire la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d. Formuler un résultat relatif à une fonction contractante dans un intervalle stable et fermé.

4. (Esr04) Soit a et b réels strictement positifs fixés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 et v_0 pour que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a + bu_n},\ v_{n+1} = \sqrt{a + bv_n},$$

soient adjacentes.

[1] On utilise une méthode analogue pour la définition de la fonction exponentielle dans la feuille d'exercices sur les suites à valeurs complexes. Il s'agit d'une méthode accessible en première année pour contourner la notion de suite de Cauchy.

Rémy Nicolai _fex_srpdf du 28 février 2020

1. pas de correction pour Esr01.tex
2. pas de correction pour Esr02.tex
3. pas de correction pour Esr03.tex
4. (Csr04) Définissons des fonction f et φ dans

$$f : \begin{cases} \left[-\frac{a}{b}, +\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{a+bx} \end{cases}, \ \varphi(x) = f(x) - x$$

La fonction f est croissante et admet un unique point fixe

$$c = b + \sqrt{b^2 + 4a}$$

On peut déterminer le signe de $f(x) - x$.

	$-\frac{a}{b}$		c		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

On se trouve dans le cas de l'étude traitée en cours. La condition assurant que les suites sont adjacentes est donc

$$u_0 < c < v_0.$$