1. (Etl01) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ avec f et f'' bornées. On note
$$M_0 = \sup_{\mathbb{R}}(|f|)\ ,\ M_2 = \sup_{\mathbb{R}}(|f''|)$$
   a. Montrer que,
$$\forall a > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{M_2}{2}a$$
   On pourra utiliser deux fois une formule de Taylor (quel reste ?) à l'ordre 2 en considérant les points x, $x-a$, $x+a$.
   b. En déduire que f' est bornée et que
$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2} \text{ avec } M_1 = \sup_{\mathbb{R}}(|f'|).$$
   c. On définit une fonction f dans $[-2, +\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [-2, 0] \\ \dfrac{2+x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$
   Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ et calculer M_0, M_1, M_2. Que peut-on en conclure pour l'inégalité du b. ?
2. (Etl02) Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. On définit τ dans I par :
$$\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$
   La fonction τ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $I \setminus \{a\}$. Pour un naturel n quelconque, exprimer $\tau^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz puis à l'aide d'une formule de Taylor avec reste de Lagrange. Quelle est la limite en a ? Que peut-on en déduire pour τ ?
3. (Etl03) Soit I un intervalle ouvert , $a \in I$ et p un entier naturel. Pour tout x de I, on définit $r_p(x)$ par :
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(a) + r_p(x)$$
   On suppose de plus qu'il existe un entier $q > p$ tel que
$$f^{(p+1)}(a) = f^{(p+2)}(a) = \cdots = f^{(q-1)}(a) = 0 \qquad f^{(q)}(a) \neq 0$$
   a. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f^{(p)}_{|[a-\alpha,a]}$ et $f^{(p)}_{|[a,a+\alpha]}$ soient monotones. Dans toute la suite de l'exercice $x \in I$ et $|x-a| < \alpha$.
   b. Montrer qu'il existe un unique $\theta_x \in [0,1]$ tel que
$$r_p(x) = \frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a + \theta_x(x-a))$$
   Cette forme du reste de la formule de Taylor est dite *de Maclaurin*.
   c. Déterminer la limite de θ_x en a.
   On trouvera l'inverse d'une racine d'un coefficient du binôme.
4. (Etl04) Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. On définit une fonction φ dans $[a,b]$ par :
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(\frac{x+a}{2})$$
   a. Calculer $\varphi'(x)$ puis l'exprimer en appliquant à f' une formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral.
   b. En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(c)$$
5. (Etl05) Montrer de deux manières que :
$$\forall t > 0 : \left| e^{-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^k}{k!} \right| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$
   Une méthode utilisera la formule de Taylor avec reste intégral et l'autre la définition de l'exponentielle complexe e^z comme la limite de la suite
$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$
   (méthode de l'hésitant fatigué)
6. (Etl06) Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que f et $f^{(3)}$ sont bornées, avec :
$$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M_1, \qquad |f^{(3)}(t)| \leq M_3$$
   a. En écrivant des formules de Taylor entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$ pour un réel $h > 0$ quelconque, montrer que, :
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h^2}{6}M_3$$
$$|f''(x)| \leq \frac{4}{h^2}M_0 + \frac{h}{3}M_3$$
   b. En utilisant l'inégalité
$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y \text{ pour } \alpha + \beta = 1$$
   (voir Efc04 de la feuille Fonctions convexes.) ou des études de fonctions, montrer :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{\frac{1}{3}} \\ |f''(x)| \leq \left(3M_0M_3^2\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$
   Une généralisation est proposée dans un problème.
7. (Etl07) On définit une fonction f par :
$$\forall a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ f(a) = \int_0^\pi \tan(a \sin x)\, dx$$
   Montrer que, en 0,
$$f(a) = 2a + O(a^3)$$
   Former un développement limité à l'ordre 3 de f en 0
8. (Etl08) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8}f''(c)$$

1. (Ctl01)

a. Écrivons les formules de Taylor avec reste intégral entre x et $x-a$ puis entre x et $x+a$.

$$\begin{cases} f(x-a) = f(x) - af'(x) + \dfrac{a^2}{2}f''(x) + R_-(x) \\ f(x+a) = f(x) + af'(x) + \dfrac{a^2}{2}f''(x) + R_+(x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2af'(x) = f(x+a) - f(x-a) - (R_+(x) - R_-(x))$$

avec $|f(x+a) - f(x-a)| \leq 2M_0$ et

$$|R_+(x) - R_-(x)| \leq 2\,\frac{a^2}{2}M_2$$

par l'inégalité de Taylor Lagrange. On en déduit l'inégalité demandée.

b. La question précédente montre que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{M_0}{a} + \frac{M_2}{2}\,a$$

est un majorant de $|f'|$. Le meilleur majorant que l'on peut obtenir ainsi est la plus petite valeur de la fonction

$$\varphi : a \mapsto \frac{M_0}{a} + \frac{M_2}{2}\,a.$$

On forme le tableau de variations de la fonction

$$\varphi'(a) = -\frac{M_0}{a^2} + \frac{M_2}{2}.$$

La fonction est décroissante puis croissante. Elle atteint sa plus petite valeur $\sqrt{2M_0M_1}$ en $\sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$.

c. On calcule les dérivées dans chaque intervalle pour former les tableaux de variations.

$$f'(x) = \begin{cases} -\,x & \text{si } -x \in [-2,0] \\ -\dfrac{x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\,1 & \text{si } -x \in [-2,0] \\ -\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

On constate que les fonctions se raccordent bien et que f est donc $\mathcal{C}^2$.

$$f^{(3)}(x) = \frac{12x}{(1+x^2)^4}(1-x^2) \text{ si } x > 0.$$

On en déduit $M_0 = M_1 = 2$ et $M_2 = 1$ qui sont atteints en -2 et non aux extréma locaux $(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Cette fonction vérifie $M_1 = \sqrt{M_0M_2}$ mais elle n'est pas dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ donc on n'a pas montré que l'inégalité du b. est optimale.

2. (Ctl02) Remarquons que

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(p)} = \underbrace{(-1)(-2)\cdots}_{p \text{ facteurs}}\frac{1}{(x-a)^{p+1}} = (-1)^p p!\,\frac{1}{(x-a)^{p+1}}.$$

Pour $x \neq a$, la formule de Leibniz s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(x)-f(a))^{(k)}\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n-k)} \\ &= (f(x)-f(a))\,(-1)^n n!\,\frac{1}{(x-a)^{n+1}} \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!\,\frac{1}{(x-a)^{n-k+1}}\end{aligned}$$

On peut interpréter l'expression de $\tau^{(n)}$ en utilisant une formule de Taylor entre x et a.

$$\begin{aligned}\tau^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}(f(a)-f(x) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}(x)\,(a-x)^k) \\ &= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}R_n(x)\end{aligned}$$

où $R_n(x)$ est le reste intégral de la formule de Taylor. L'encadrement de Lagrange montre qu'il existe c_x entre a et x tel que

$$\tau^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(c_x).$$

Lorsque x tend vers a, comme la fonction est $\mathcal{C}^\infty$, la limite est $\frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}$. En utilisant une récurrence et le théorème de la limite de la dérivée, on montre que τ est $\mathcal{C}^\infty(I)$ avec

$$\tau^{(n)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

3. pas de correction pour Etl03.tex
4. pas de correction pour Etl04.tex
5. pas de correction pour Etl05.tex
6. pas de correction pour Etl06.tex
7. (Ctl07) Toute formule de Taylor est une formule de Taylor *idiote*. Par exemple

$$\tan u = u + R(u)$$

où R est le *reste* c'est à dire

$$R(u) = \tan u - u.$$

Ce qui fait l'utilité d'une formule de Taylor c'est l'information dont on dispose sur le reste. Il n'est pas intéressant d'introduire trop tôt ce renseignement dans le contexte d'une intégrale.

$$\begin{aligned}f(a) &= \int_0^\pi (a\sin x + R(a\sin x))\,dx \\ &= 2a + \int_0^\pi R(a\sin x)\,dx\end{aligned}$$

On connait les développements limités de tan. On en déduit une information sur le reste

$$R(u) \in O(u^3)$$

que l'on traduit sous une forme adaptée à l'utilisation dans l'intégrale. Il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que

$$R(u) = u^3\varphi(u)$$

La fonction φ est localement bornée en 0. Il existe $\alpha > 0$ et $\Phi > 0$ tels que

$$|u| \leq \alpha \Rightarrow |R(u)| \leq |u|^3\Phi$$

On en déduit, en majorant l'intégrale,

$$\begin{aligned}|a| \leq \alpha \Rightarrow \left|\int_0^\pi R(a\sin x)\,dx\right| &\leq \int_0^\pi |a|^3(\sin x)^3\Phi\,dx \\ &\leq \pi\Phi|a|^3\end{aligned}$$

8. (Ctl08) Définissons une fonction φ et dérivons la :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \frac{f(a)+f(x)}{2} - f(\frac{a+x}{2}) \\ \varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - f'(\frac{a+x}{2})\right)\end{aligned}$$

Comme $x - \frac{a+x}{2} = \frac{x-a}{2}$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à φ' donne

$$\frac{m_2}{4}(x-a) \leq \varphi'(x) \leq \frac{M_2}{4}(x-a)$$

avec m_2 et M_2 les valeurs minimale et maximale de la fonction continue f'' dans le segement.
En intégrant entre a et b, on obtient

$$\frac{m_2}{8}(b-a)^2 \leq \varphi(b) - \varphi(a) \leq \frac{M_2}{8}(b-a)^2$$

On termine en remarquant que $\varphi(a) = 0$ et en appliquant le théorème de la valeur intermédiaire à la fonction continue f'' :

$$m_2 \leq \frac{8\varphi(b)}{(b-a)^2} \leq M_2$$

entraine qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\varphi(b) = \frac{(b-a)^2}{8}f''(c)$$