1. (Eva01) On lance deux dés. On note X la somme des nombres obtenus, déterminer la loi de X.
2. (Eva02) Loi hypergéométrique.
On considère une urne avec N boules blanches ou noires. Soit p la proportion de boules blanches parmi les N. On tire sans remise $n \leq \min(Np, N(1-p)$ boules de cette urne. Déterminer la loi et l'espérance du nombre de boules blanches.
3. (Eva03) On lance deux dés. Soit Z le plus grand des deux nombres obtenus. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de Z. Généraliser avec n dés.
4. (Eva04) Une urne contient 1 boule blanche et n noires. On tire sans remise, X est le numéro de tirage de la boule blanche. Quelle est la loi de X ?
5. (Eva05) Loi géométrique tronquée.
Soit n un entier naturel. On procède à n (au plus) expériences de Bernoulli de paramètre p indépendantes en s'arrêtant au premier succès. On note X_n le rang du premier succès en convenant que X_n prend la valeur 0 si aucun succès n'est obtenu. Préciser la loi de X_n et son espérance. Étudier la convergence des suites $(\mathbb{P}(X_n = k))_{n\in\mathbb{N}}$ pour k fixé dans $\mathbb{N}$ et $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
6. (Eva06) Loi binomiale négative tronquée.
On répète des experiences indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Soit r et n des entiers naturels non nuls donnés. On s'arrête dès que l'on a obtenu r succès ou après la n-ième expérience. On note X_r le numéro du r-ème succès (0 si r succès ne sont pas obtenus). Déterminer la loi de X_r.
7. (Eva07) Loi de Poisson.
Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère une suite de jeux de hasard où le n-ième jeu se compose de n expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Soit X_n le nombre d'expériences réussies lors du n-ème jeu.
Montrer que pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé,
$$(\mathbb{P}(X_n = k))_{n\geq k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$
8. (Eva08) Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Quelle est la loi de $n - X$?
9. (Eva09) Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules. Quelle est la loi et l'espérance de la variable égale au rang de la dernière boule blanche tirée ?
10. (Eva10) On tire des nombres 2 à 2 distincts entre 1 et n tant que la suite qu'ils forment est strictement croissante. On note X_n le nombre de tirages. Pour $k \leq n$, quelle est la probabilité de $(X_n \geq k)$? En déduire l'espérance de X_n. Étudier la limite de $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$
11. (Eva11) (transformation d'Abel) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé fini. Montrer que
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$
$$E(X^2) - E(X) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X > k)$$
12. (Eva12) Loi faible des grands nombres.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont deux à deux indépendantes avec la même espérance e et la même variance v.
On introduit les variables moyennes : pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$
Montrer que $E(\overline{X}_n) = e$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\left(\mathbb{P}(\left|\overline{X}_n - e\right| \geq \varepsilon)\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$
13. (Eva13) Inégalité de Chernoff.
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$, soit g une fonction définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$ croissante et à valeurs réelles stictement positives. Montrer que, pour tout $a \in I$,
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(g \circ X)}{g(a)}$$
En déduire que,
$$\forall a \in I, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{t>0} E\left(e^{t(X-a)}\right)$$
14. (Eva14) Convexité. Inégalité de Jensen.
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ telle que g'' soit à valeurs positives. Montrer que,
$$\forall (x,y) \in I^2,\ g(x) \geq g(y) + g'(y)(x - y)$$
Interpréter géométriquement.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I définie sur un espace probabilisé (Ω, p). Montrer que $E(X) \in I$ et que
$$g(E(X)) \leq E(g \circ X)$$
15. (Cva15) Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour un événement quelconque A, on note $E_A(X)$ et $V_A(X)$ l'espérance et la variance de la même loi X pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
   a. Exprimer $E(X)$ en fonction de $E_A(X)$ et de $E_{\overline{A}}(X)$.
   Quel encadrement peut-on en déduire si $E_A(X) \leq E_{\overline{A}}(X)$?
   b. Soit $c > 0$ et $A = \{|X - E(X)| \leq c\}$. Montrer que $V_A(X) \leq V(X)$.
16. (Eva16) On lance un dé, on note n le nombre sorti puis on joue n fois à pile ou face. On note X le nombre de faces. Déterminer la loi de X et son espérance.
17. (Eva17) Nombre de rencontres.
On place n objets numérotés de 1 à n dans n cases numérotées de 1 à n. Soit R le nombre de rencontres. Calculer l'espérance de R et sa variance sans détailler sa loi.
18. (Eva18) Un dé est lancé n fois.
   a. Soit V le nombre de valeurs qui ne sont jamais sorties. Calculer l'espérance de V et sa variance.
   b. Soit S le nombre de fois où un lancer a donné 6 et a été suivi par deux autres 6. Calculer l'espérance de S.

Rémy Nicolai _fex_vapdf du 23 mai 2019

19. (Eva19) Suite de piles ou faces.
À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du précédent, on gagne 1 euro. On note X_n la variable aléatoire égale au gain total après n lancers.
   a. Préciser les lois de X_2 et X_3 et leurs espérances.
   b. Préciser $X_n(\Omega)$. Montrer que
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = n-1)$$
   c. Former une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ pour $k \in X_n(\Omega)$.
   d. On note G_n la fonction génératrice de X_n.
$$G_n(s) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} \mathbb{P}(X_n = k)s^k$$
Montrer que G_n est polynomiale et que
$$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} G_n(s)$$
En déduire l'espérance de X_n.

20. (Eva20) Fonctions génératrice d'une somme de variables indépendantes.
La fonction génératrice d'une variable aléatoire X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs entières est la fonction polynomiale
$$G_X(s) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)s^k$$
Soit $X_1, \cdots, X_p$ des variables aléatoires de ce type et mutuellement indépendantes et $X = X_1 + \cdots + X_p$. Montrer que
$$G_X = G_{X_1} G_{X_2} \cdots G_{X_p}$$

21. (Eva21) Un ascenseur dessert un bâtiment de e étages. Il démarre du rez de chausssée avec N personnes en montant toujours et tout le monde en sort. Les distributions d'étages et de personnes sont équiprobables. Comment modéliser mathématiquement l'expérience ? Soit X la variable égale au numéro de l'étage du premier arrêt. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ et en déduire une expression de $E(X)$. Considérons, pour N fixé, $E(X)$ comme une suite en e. Montrer qu'elle diverge vers $+\infty$ et préciser une suite équivalente.
Reprendre des questions analogues avec la variable Y égale au plus grand étage atteint par l'ascenseur.

22. (Eva22) Soit X une variable aléatoire réelle qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que
$$\left\{E\left((X-a)^2\right), a \in \mathbb{R}\right\}$$
admet un plus petit élément à déterminer.

23. (Eva23) D'une urne contenant, des boules blanches en proportion p et des boules noires, on tire avec remise N boules et on marque x points par boule blanche et y points par boule noire tirée. On note S la somme des points obtenus.
   a. Calculer l'espérance et la variance de S.
   b. Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 5$, majorer $\mathbb{P}(|S - E(S)| > 5)$ et $\mathbb{P}(|S - E(S)| > 10)$ avec l'inégalité de Bienaymé-Chebychev

24. (Eva24) Approximation uniforme d'une fonction continue par les polynômes de Bernstein.
Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on considère une variable aléatoire $X_{n,x}$ binomiale de paramètres n, x dans un espace probabilisé fini. On pose
$$Y_{n,x} = f\left(\frac{1}{n} X_{n,x}\right).$$
   a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_n(f) \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in [0,1], E(Y_{n,x}) = B_n(f)(x).$$
   b. On fixe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_f = \max_{[0,1]} |f|$.
      i. Montrer que $\forall x \in [0,1]$,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \\ \leq \varepsilon + 2M_f\, \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$
      ii. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$,
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \\ \leq \varepsilon + 2M_f\, \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\delta).$$
   c. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tq } n \geq N \\ \Rightarrow \forall x \in [0,1], \ |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
(convergence uniforme)

25. (Eva25) Dans une urne contenant des boules blanches et noires, on procède à n tirages successifs sans préciser le procédé. On note N le numéro du tirage de la première boule noire (avec $N = 0$ si on ne tire que des boules blanches) et B le numéro du tirage de la première boule blanche (avec $B = 0$ si on ne tire que des boules noires). Montrer que
$$\mathrm{Cov}(N, B) = -(E(N) - 1)(E(B) - 1).$$

26. (Eva26) Inégalité d'Edith Kosmanek.
Dans un espace probabilisé fini, montrer que pour tout couple d'événements (A, B) :
$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \sqrt{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{A}\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{B})} \leq \frac{1}{4}.$$
On utilisera des variables de Bernoulli attachées aux évenements, leur covariance et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. (Cva01) L'ensemble des valeurs prises par la variable est $I = [\![2, 12]\!]$. Pour $k \in I$, la probabilité d'obtenir k est égale au nombre de solutions dans $[\![1, 6]\!]^2$ de l'équation $x+y = k$ multiplié par $\frac{1}{36}$ (probabilité d'un couple quelconque).
   Pour $k \leq 7$, ces solutions sont
   $$(1, k-1), (2, k-2), \cdots, (k-1, 1) \Rightarrow p(X = k) = \frac{k-1}{36}$$
   Pour $k \geq 8$, ces solutions sont
   $$(k-6, 6), (k-5, 5), \cdots, (6, k-6) \Rightarrow p(X = k) = \frac{13-k}{36}$$
2. pas de correction pour Eva02.tex
3. pas de correction pour Eva03.tex
4. pas de correction pour Eva04.tex
5. pas de correction pour Eva05.tex
6. pas de correction pour Eva06.tex
7. pas de correction pour Eva07.tex
8. pas de correction pour Eva08.tex
9. pas de correction pour Eva09.tex
10. (Cva10) Modélisons le tirage à l'aide d'un parcours aléatoire sur un graphe orienté. Chaque noeud représente l'état de l'urne a un instant donné, il est donc associé à une partie de $[\![1, n]\!]$.
    Un événement élémentaire est une chemin partant de $[\![1, n]\!]$ et aboutissant à $\emptyset$.
    Pour un noeud A qui est une partie de cardinal a, il existe $n - a$ arêtes qui arrivent sur A et a arêtes qui en partent. Ces arêtes sortantes sont équiprobables. On en tire que la probabilité d'un chemin de longeur k ne dépend que de k, elle est égale à
    $$\underbrace{\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots}_{k \text{ facteurs}}$$
    Les suites strictement croissantes de k nombres sont en bijection avec les parties à k éléments. On en tire
    $$\mathbb{P}(X_n > k) = \binom{n}{k}\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots = \frac{1}{k!}.$$
11. pas de correction pour Eva11.tex
12. pas de correction pour Eva12.tex
13. pas de correction pour Eva13.tex
14. (Cva14) On démontre l'inégalité demandée avec une formule de Taylor avec reste intégral.
    L'interprétation géométrique est que le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes.
    Par positivité, on déduit que $E(X) \in I$. On note e cette espérance et on applique l'inégalité avec e dans le rôle de y et $x = X(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$.
    $$g(x) \geq g(e) + g'(e)(x - m)$$
    On multiplie par $p(\{\omega\})$ et on somme sur les ω de Ω. La somme des $(X(\omega) - e)p(\{\omega\})$ est nulle et on obtient la formule demandée.
15. pas de correction pour Eva15.tex
16. pas de correction pour Eva16.tex
17. (Cva17) Notons X_i la variable aléatoire de Bernouilli qui vaut 1 si l'objet i se trouve dans la case numéro i. En modélisant par des bijections, son paramètre est
    $$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$
    De plus
    $$R = X_1 + \cdots + X_n \Rightarrow E(R) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = 1.$$
    $$\begin{aligned} V(R) &= V(X_1) + \cdots + V(X_n) + 2\sum_{i<j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n\frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) + n(n-1)\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{aligned}$$
    car X_iX_j est de Bernoulli de paramètre
    $$\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$
18. (Cva18) Décomposer la variable en somme de variables de Bernoulli.
    a. Pour v entre 1 et 6, on note V_v la variable qui prend la valeur 1 si v n'est jamais sorti et 0 sinon.
    b. Pour i entre 1 et $n - 2$, on note S_i la variable qui prend la valeur 1 si les lancers $i, i+1, i+2$ sont des 6 et qui prend la valeur 0 sion.
19. (Cva19)
    a. La variable X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. La loi de X_3 est donnée par le tableau

$k \in X_3(\Omega)$	0	1	2
$\mathbb{P}(X_3 = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

    En effet, les suites PPP et FFF conduisent à 0, les suites PFP et FPF à 2 et les 4 autres à 1. On en déduit
    $$E(X_2) = \frac{1}{2},\ E(X_3) = 1$$
    b. Il est clair que $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ et que
    $$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n}$$
    car les événements réalisant ces valeurs sont fixés par le premier lancer : PPP... ou FFF pour 0, PFPFPF... ou FPFP... pour $n - 1$.
    c. Pour une pièce équilibrée,
    $$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = k-1)\right)$$
    car cela revient à fixer le résultat du lancer $n + 1$. Si $X_n = k$ avec F au lancer n le lancer $n + 1$ doit donner F etc.

d. La fonction génératrice G_n est polynomiale car la somme est finie (entre 0 et $n-1$). La relation est une conséquence de c. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} G'_{n+1}(s) &= \frac{1}{2}G_n(s) + \frac{1+s}{2}G'_n(s) \\ \Rightarrow E(X_{n+1}) &= \frac{1}{2}\underbrace{G_n(1)}_{=1} + E(X_n) \Rightarrow E(X_n) = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

20. (Eva20) Fonctions génératrice d'une somme de variables indépendantes.
La fonction génératrice d'une variable aléatoire X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs entières est la fonction polynomiale

$$G_X(s) = \sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k)s^k$$

Soit $X_1, \cdots, X_p$ des variables aléatoires de ce type et mutuellement indépendantes et $X = X_1 + \cdots + X_p$. Montrer que

$$G_X = G_{X_1}G_{X_2}\cdots G_{X_p}$$

21. (Cva21) On peut représenter un résultat de l'expérience par une fonction de $[\![1, N]\!]$ (les personnes) dans $[\![1, e]\!]$ (les étages). On ne doit pas ajouter de conditions supplémentaires dans les conditions de l'énoncé.
L'événement $X > k$ est formé par les fonctions à valeurs dans $[\![k+1, e]\!]$. On en tire

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{(e-k)^N}{e^N}$$

Le calcul de l'espérance utilise une transformation d'Abel.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{e} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{e} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X>k)\right) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{e-1}\left((k+1)-k\right)\mathbb{P}(X>k) - e\underbrace{\mathbb{P}(X>e)}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^{e-1}\left(\frac{k}{e}\right)^N \end{aligned}$$

On interprète $\frac{1}{e}E(X)$ comme une somme de Riemann, elle converge vers

$$\int_0^1 t^N\,dt = \frac{1}{N+1}$$

22. pas de correction pour Eva22.tex
23. pas de correction pour Eva23.tex
24. pas de correction pour Eva24.tex
25. (Cva25) L'ensemble des valeurs de N et B est $[\![0, n]\!]$. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(B = i \text{ et } N = j) = \begin{cases} (B=i) \text{ si } i > 1 \text{ et } j = 1 \\ (N=j) \text{ si } i = 1 \text{ et } j > 1 \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} E(B\,N) &= \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} ij\,\mathbb{P}\left(B = i \text{ et } N = j\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}\left(B=i\right) + \sum_{j=2}^{n} j\,\mathbb{P}\left(N=j\right) \\ &= E(B) - \mathbb{P}\left(B=1\right) + E(N) - \mathbb{P}\left(N=1\right) \\ &= E(B) + E(N) - 1 \end{aligned}$$

car $(B=1)$ et $(N=1)$ forment un système complet d'événements. On termine en factorisant

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(N,B) &= E(N\,B) - E(N)E(B) \\ &= E(N) + E(B) - 1 - E(N)E(B) \\ &= -\left(E(N)-1\right)\left(E(B)-1\right). \end{aligned}$$

26. pas de correction pour Eva26.tex