1. (Evs01) Soient A, B, C sont des parties quelconques d'un ensemble E.
Montrer que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ si et seulement si $B = C$. Montrer que
$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

2. (Evs02) Soit E un ensemble. On va étudier diverses équations d'inconnue X dans $\mathcal{P}(E)$.
   a. Soit A et B des parties de E. Discuter de l'existence de solutions de l'équation $E(A, B)$:
   $$X \cup A = B$$
   Lorsque $E(A, B)$ admet des solutions, caractériser par une double inclusion les parties X de E qui sont solutions.
   b. En se ramenant à l'équation précédente, discuter de l'existence de solutions pour les équations suivantes et caractériser les parties de E qui sont solutions.
   $$(1)\ X \cap A = B, \quad (2)\ X \setminus A = B, \quad (3)\ A \setminus X = B$$
   c. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E. Résoudre les systèmes d'équations en précisant les conditions assurant l'existence de solutions.
   $$\begin{aligned} (S_1) : &\quad \forall i \in I,\ A_i \cup X = B_i \\ (S_2) : &\quad \forall i \in I,\ A_i \cap X = B_i \end{aligned}$$

3. (Evs03) Négation d'une proposition.
   a. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, nier
   $$\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \leq n$$
   b. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, nier
   $$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$$
   c. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, nier
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon)$$

4. (Evs04) Soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation réflexive dans E telle que
$$\forall (x, y, z) \in E^3, \left\{ \begin{array}{l} x\ \mathcal{R}\ y \\ y\ \mathcal{R}\ z \end{array} \right. \Rightarrow z\ \mathcal{R}\ x.$$
Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

5. (Evs05) (voir exercice 20) Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que
$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) \subset (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A).$$
Pour tout $x \in E$, on note $n(x)$ le nombre de parties A, B, C auxquelles x appartient. En utilisant $n(x)$, montrer l'inclusion inverse.

6. (Evs06) Soit $\prec$ une relation d'ordre (pas forcément total) sur un ensemble A. Soit a et b deux éléments quelconques de A. Montrer que
$$(a \prec b \text{ et } a \neq b) \Rightarrow (b \prec a \text{ faux}).$$
Montrer, en donnant un exemple, que l'implication réciproque est fausse.

7. (Evs07) Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F ; $A, B, \cdots$ sont des parties quelconques de E ; $X, Y, \cdots$ sont des parties quelconques de F. Montrer que
$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) &(1)\\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) &(2)\\ f(f^{-1}(X)) &\subset X &(3)\\ A &\subset f^{-1}(f(A)) &(4) \end{aligned}$$
Montrer l'égalité dans (2) et (4) lorsque f est injective, dans (3) lorsque f est surjective. Montrer que l'égalité dans (4) entraine f injective. Montrer que l'égalité dans (3) entraine f surjective.

8. (Evs08) Soit f, g, h trois fonctions telles que $h\circ g\circ f$, $g\circ f\circ h$, $f \circ h \circ g$ soient définies. Comment cette hypothèse se traduit-elle sur les espaces de départ et d'arrivée des différentes fonctions ? On suppose que $h\circ g\circ f$ et $g\circ f\circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ est surjective.
Montrer que f, g, h sont bijectives.

9. (Evs09) Forme ensembliste du procédé diagonal de Cantor. Soit E un ensemble et f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. En considérant
$$A = \{x, x \in E \text{ et } x \notin f(x)\}$$
montrer que f n'est pas surjective.

10. (Evs10) Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ telle que
$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$
Soit
$$\mathcal{U} = \{Z \in \mathcal{P}(E), f(Z) \subset Z\} \qquad U = \bigcap_{Z\in\mathcal{U}} Z$$
$$\mathcal{V} = \{Z \in \mathcal{P}(E), Z \subset f(Z)\} \qquad V = \bigcup_{Z\in\mathcal{V}} Z$$
Montrer que $f(U) = U$ et $f(V) = V$.

11. (Evs11) Soit A et B deux parties non vides d'un ensemble E, soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par :
$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) = (A \cap X, B \cap X)$$
Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B = E$ et que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

12. (Evs12) Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F, A, B, $\cdots$ sont des parties de E, X,Y,$\cdots$ sont des parties de F. On définit des applications Φ et φ par
$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{P}(E), &\qquad \Phi(A) = f(A) \\ \forall X \in \mathcal{P}(F), &\qquad \varphi(X) = f^{-1}(X) \end{aligned}$$
Montrer les propriétés suivantes :
$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\Leftrightarrow \Phi \text{ injective} \\ f \text{ injective} &\Rightarrow \varphi \text{ surjective} \\ f \text{ surjective} &\Leftrightarrow \Phi \text{ surjective} \\ f \text{ surjective} &\Rightarrow \varphi \text{ injective} \end{aligned}$$
On pourra considérer $\varphi\circ\Phi$ lorsque f est injective et $\Phi\circ\varphi$ lorsque f est surjective.

13. (Evs13) Sur un ensemble $E = \{e, a, b\}$, former la table d'une opération admettant e comme élément neutre et pour laquelle certains éléments ont plusieurs inverses. Que dire de l'associativité d'une telle opération ?

14. (Evs14) Système et opérateur de fermeture.
Un *système de fermeture* sur un ensemble E est une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :
$$\forall \mathcal{D} \subset \mathcal{C}, \qquad \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \in \mathcal{C}$$
Un *opérateur de fermeture* sur E est une application $J : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ vérifiant $J \circ J = J$ et
$$\forall (X, X') \in \mathcal{P}(E) : \; X \subset X' \Rightarrow J(X) \subset J(X'),$$
$$\forall X \in \mathcal{P}(E) : \; X \subset J(X).$$
   a. Soit $\mathcal{C}$ un système de fermeture sur E.
   On définit une fonction J de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par :
   $$\forall X \subset E, \; J(X) = \bigcap_{Y \in \mathcal{C} \text{ et } X \subset Y} Y.$$
   Montrer que J est un opérateur de fermeture.
   b. Soit J un opérateur de fermeture.
   On définit une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(E)$ par :
   $$\mathcal{C} = \{X \subset E \text{ tq } J(X) = X\}.$$
   Montrer que $\mathcal{C}$ est un système de fermeture.

15. (Evs15) Soit E un ensemble et $f \in \mathcal{F}(E, E)$ tels que
$$\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, \; 0 < p < q \text{ et } f^q = f^p.$$
Les puissances sont relatives à la composition
$$f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$
Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ $f^{q-p} = \mathrm{Id}_E$.

16. (Evs16) Soit E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F. Montrer que f est injective si et seulement si
$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

17. (Evs17) On définit une relation $\prec$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en posant
$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{N}^2 : (x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y < x' + y' \\ \text{ou} \\ x + y = x' + y' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$$
Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre. Montrer que toute partie non vide admet un plus petit élément.
Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, calculer le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a, b) \prec (x, y)$. En déduire une bijection explicite de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

18. (Evs18) Soit E un ensemble fixé. On définit des opérations notées $\uparrow$ et $\downarrow$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant
$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \; \begin{cases} A \downarrow B = \overline{A \cup B} \\ A \uparrow B = \overline{A \cap B} \end{cases}$$
Ces opérations sont elles commutatives, associatives ? Existe-t-il des éléments neutres ? des éléments inversibles ?
Exprimer $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ en utilisant uniquement l' opération $\downarrow$. Même question avec $\uparrow$.

19. (Evs19) Soit E un ensemble et f, g deux applications de E dans E telles que $f \circ g$ injective et $g \circ f$ surjective. Montrer que f et g sont bijectives.

20. (Evs20) Extension de l'exercice 5. Soit n naturel non nul et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des parties d'un ensemble E. Pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, on définit
$$\widehat{A}_I = \bigcap_{i \in I} A_i \quad , \overset{\vee}{A}_I = \bigcup_{i \in I} A_i$$
$$\widehat{\overline{A}}_I = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad , \overset{\vee}{\overline{A}}_I = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$
où $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E.
Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on désigne par $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à p éléments. On définit
$$U_p = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_p} \widehat{A}_I, \quad N_p = \bigcap_{I \in \mathcal{P}_p} \overset{\vee}{A}_I.$$
Pour $x \in E$, on note $n(x)$ le nombre de parties A_i contenant x et $\overline{n}(x)$ le nombre de parties A_i ne contenant pas x de sorte que $n(x) + \overline{n}(x) = n$.
   a. Exprimer avec des quantificateurs qu'un élément $x \in E$ appartient ou non aux parties de E définies par l'énoncé.
   b. Montrer que, pour tout $x \in E$,
   $$x \in U_p \Leftrightarrow n(x) \geq p, \qquad x \in N_p \Leftrightarrow \overline{n}(x) < p.$$
   c. En remarquant que $\overline{n}(x) < p \Leftrightarrow \overline{n}(x) \leq p - 1$, montrer que $N_p = U_{n-p+1}$.

21. (Evs21) On définit une relation $\prec$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en posant
$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \forall (x', y') \in \mathbb{N}^2 : (x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y < x' + 2y' \\ \text{ou} \\ x + 2y = x' + 2y' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$$
Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre. Montrer que toute partie non vide admet un plus petit élément.

22. (Evs22) Soit E un ensemble, $\mathcal{P}$ une partition de E, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}$, $\mathcal{B} = C_{\mathcal{P}}\mathcal{A}$. On note
$$F = \{x \in E, \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$
$$G = \{x \in E, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B\}$$
Exprimer F et G à l'aide d'un symbole d'union ensembliste. Montrer que $\mathcal{A}$ (resp $\mathcal{B}$) est une partition de F (resp G). Établir $G = C_E(F)$.

23. (Evs23) Soit $A \subset X$, comparer $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(X)$ pour l'inclusion. Soient A et B des parties d'un ensemble E. Comparer $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cap B)$ pour l'inclusion. Comparer $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$ pour l'inclusion.

24. (Evs24) Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Caractériser la relation $A\cup B = B\cap C$ à l'aide d'inclusions entre A, B et C.
25. (Evs25) Donner la liste des éléments de
$$\mathcal{P}(E) \text{ avec } E = \mathcal{P}(\{\emptyset\}).$$
26. (Evs26) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1,2,3\}$. Pour $i\in\{1,2,3\}$, on pose
$$A_i = \{f\in\mathcal{F} \text{ tq } f(0)=i\}$$
En formant une relation d'équivalence, montrer que (A_1,A_2,A_3) est une partition de $\mathcal{F}$.
27. (Evs27) On définit une relation notée $\sim$ dans l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 en posant
$$a\sim b \Leftrightarrow \exists(p,q)\in\mathbb{N}^2 \text{ tq } \begin{cases} a=b^p \\ b=a^q\end{cases}$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Étudier les classes d'équivalence.
28. (Evs28) Soit E, F, G trois ensembles, $f\in\mathcal{F}(E,F)$ et $g\in\mathcal{F}(F,G)$.
    a. Montrer que
$$\left.\begin{aligned} g\circ f &\text{ injective}\\ f &\text{ surjective}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g \text{ injective}$$
    b. Montrer que
$$\left.\begin{aligned} g\circ f &\text{ surjective}\\ g &\text{ injective}\end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ surjective}$$
29. (Evs29) Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ injective telle que $f(0)=0$ et que l'image d'un intervalle soit un intervalle. Montrer qu'elle est égale à $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ ou $-\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse $f(0)=0$?
30. (Evs30) Soit E un ensemble. Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit l'opération *différence symétrique* notée Δ par :
$$\forall(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2,\ A\Delta B = A\setminus B\cap B\setminus A.$$
    a. Pour X et Y dans $\mathcal{P}(E)$, calculer
$$(X\Delta Y)\Delta X.$$
    b. Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$. Discuter, selon A et B de l'ensemble des solutions de l'équation
$$X\Delta A = B$$
d'inconnue $X\in\mathcal{P}(E)$.
31. (Evs31) Pour s'entrainer à raisonner : des démonstrations en exercices en partant d'un jeu d'axiomes.
On admet les propriétés suivantes.
$\mathbb{N}$ est un ensemble non vide, muni d'une relation d'ordre (notée $\leq$) et non majoré.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
On note $0=\min\mathbb{N}$ et $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers plus petits que n.
Comme $\mathbb{N}$ est non majoré, aucun naturel n n'est un majorant de $\mathbb{N}$. Le complémentaire $\mathbb{N}\setminus[\![0,n]\!]$ est donc non vide pour tout $n\in\mathbb{N}$. On définit une application S de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ avec
$$S(n) = \min(\mathbb{N}\setminus[\![0,n]\!])$$
L'application S est surjective.
On convient de noter $1=S(0)$.
On admet que pour tout $n\neq 0$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $S(m)=n$.
La notation usuelle $a<b$ signifie $a\leq b$ et $a\neq b$.
Vous devez prouver les propositions numérotées en utilisant uniquement les propriétés admises et les propriétes avec un numéro plus petit.
    a. $\mathbb{N}$ est totalement ordonné.
    b. Pour tous naturels a et b,
$$b<a \Leftrightarrow (a\leq b \text{ faux })$$
    c. Pour tout n naturel, $n<S(n)$ et
$$[\![0,S(n)]\!] = [\![0,n]\!]\cup\{S(n)\}$$
    d. S est strictement croissante et injective.
    e. Principe de récurrence. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que
$$\exists a\in A \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}:\ n\in A\Rightarrow S(n)\in A$$
alors $A=[\![a,+\infty[\![= \{k\in\mathbb{N} \text{ tq } a\leq k\}$.
    f. Récurrence descendante. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $A\subset[\![0,n]\!]$ vérifiant $n\in A$ et, pour $x\in[\![0,n-1]\!]$,
$$S(x)\in A\Rightarrow x\in A$$
alors $[\![0,n]\!]\subset A$.
    g. Pour tous éléments x et n de $\mathbb{N}$:
$$n\leq x<S(n)\Rightarrow x=n \quad n<x\leq S(n)\Rightarrow x=S(n)$$
    h. Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.
    i. Définitions. Un ensemble Ω est *fini* si et seulement si toute application injective de Ω dans lui même est surjective. Un ensemble est *infini* si et seulement si il n'est pas fini. Un ensemble est *infini dénombrable* si et seulement si il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
    j. $\mathbb{N}$ n'est pas fini.
    k. S'il existe une bijection entre deux ensembles A et B, alors A est fini si et seulement si B est fini.
    l. Toute partie d'un ensemble fini est finie.
    m. Soit $n\in\mathbb{N}$ et φ une application strictement croissante de $[\![0,n]\!]$ dans $\mathbb{N}$. Alors $x\leq\varphi(x)$ pour tous les $x\in[\![0,n]\!]$.
    n. Soit $n\in\mathbb{N}$ et φ strictement croissante de $[\![0,n]\!]$ dans $[\![0,n]\!]$, alors φ est l'identité de $[\![0,n]\!]$.
    o. Soit $n\in\mathbb{N}$ et φ une application de $[\![0,n]\!]$ dans $\mathbb{N}$, alors $\varphi([\![0,n]\!])$ est une partie majorée de $\mathbb{N}$.

p. La partie $[\![0, n]\!]$ de $\mathbb{N}$ est finie pour tout entier naturel n.

q. Soit p et q deux entiers naturels tels qu'il existe une application injective de $[\![0, p]\!]$ dans $[\![0, q]\!]$, alors $p \leq q$.

r. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application injective de $[\![0, n]\!]$ dans A, alors A est infinie.

s. Soit A un ensemble. S'il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans A, alors A n'est pas fini.

t. Soit A un ensemble fini non vide. Il existe un unique entier naturel n pour lequel il existe une bijection entre $[\![0, n]\!]$ et A.

u. Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

v. Toute partie d'un ensemble fini est finie et son cardinal est inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble qui le contient.

1. (Cvs01) Il est bien évident que
$$B=C \Rightarrow \begin{cases} A\cap B = A\cap C \\ A\cup B = A\cup C \end{cases}$$
Réciproquement, on veut montrer
$$\begin{cases} A\cap B = A\cap C \\ A\cup B = A\cup C \end{cases} \Rightarrow B=C$$
On veut donc montrer une égalité ensembliste $B = C$ en utilisant certaines hypothèses.
On peut raisonner avec des éléments en prouvant deux inclusions.
Pour montrer $B \subset C$, on commence le raisonnement par un « Quelque soit $b \in B$ ».
Pour tout $b \in B$, on veut montrer que $b \in C$. Comme $B \subset A\cup B = A\cup C$ par hypothèse, $b \in A \cup C$. Donc b est soit dans A, soit dans C soit dans les deux. S'il est dans A, il est dans $A\cap B = A\cap C$, il est donc forcément dans C. On en déduit $B \subset C$.
Comme B et C jouent des rôles symétriques, l'autre inclusion se démontre de la même manière d'où $B = C$.
On peut aussi prouver ce résultat en « calculant » avec les relations
$$X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)$$
$$X\cup(Y\cap Z) = (X\cup Y)\cap(X\cup Z)$$
En effet :
$$\begin{aligned} B &= B\cap(A\cup B) \quad \text{car } B\subset A\cup B \\ &= B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C) \\ &= (C\cap A)\cup(B\cap C) = C\cap(A\cup B) = C\cap(A\cup C) = C \end{aligned}$$

2. (Cvs02) On notera $\bar{X}$ le complémentaire d'une partie X de E dans E.
   a. Si l'équation admet une solution alors $A \subset B$. On en déduit la discussion.
      – Si A n'est pas inclus dans B, l'équation n'admet pas de solutions.
      – Si $A \subset B$ alors l'équation admet des solutions et une partie X de E est solution si et seulement si
      $$B\setminus A \subset X \text{ et } X \subset B$$
      On peut remarquer que l'ensemble des solutions est en bijection avec l'ensemble des parties de A.
   b. Équation (1). Une partie X de E est solution si et seulement si $\bar{X}$ est solution de $E(\bar{A},\bar{B})$. On en déduit que (1) admet des solutions si et seulement si
   $$\bar{A}\subset\bar{B} \Leftrightarrow B\subset A$$
   Dans ce cas, $X\subset E$ est solution de (1) si et seulement si
   $$\bar{B}\setminus\bar{A}\subset\bar{X}\subset\bar{B} \Leftrightarrow B\subset X\subset B\cup\bar{A}$$
   Équation (2). Une partie X est solution de (2) si et seulement si $\bar{X}$ est solution de $E(A,\bar{B})$. Il existe des solutions si et seulement si
   $$A\subset\bar{B} \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$$
   Dans ce cas, $X\subset E$ est solution de (2) si et seulement si
   $$\bar{B}\setminus A\subset\bar{X}\subset\bar{B} \Leftrightarrow B\subset X\subset A\cup B$$
   Équation (3). Une partie X est solution de (3) si et seulement si X est solution de $E(\bar{A},\bar{B})$. Il existe des solutions si et seulement si
   $$\bar{A}\subset\bar{B} \Leftrightarrow B\subset A$$
   Dans ce cas, $X\subset E$ est solution de (3) si et seulement si
   $$\bar{B}\setminus\bar{A}\subset X\subset\bar{B} \Leftrightarrow A\setminus B\subset X\subset\bar{B}$$
   c. D'après la question a., pour tous les i de I, l'équation i du système (S_1) admet des solutions si et seulement si $A_i \subset B_i$. Lorsque ceci est réalisé, une partie X est solution du système si et seulement si $B_i\setminus A_i \subset X \subset B_i$ pour tous les $i\in I$. Par définition de l'union et de l'intersection d'une famille, ceci est équivalent à
   $$\bigcup_{i\in I}(B_i\setminus A_i)\subset X\subset\bigcap_{i\in I}B_i$$
   On peut donc conclure que la condition assurant l'existence de solutions pour le système est
   $$\forall i\in I, A_i\subset B_i \text{ et } \bigcup_{i\in I}(B_i\setminus A_i)\subset\bigcap_{i\in I}B_i$$
   Pour (S_2), on remarque que X est solution de (S_2) si et seulement si $\bar{X}$ est solution du système S_1 attaché aux complémentaires.

3. (Cvs03) Négation des propositions.
   a. Soit X une partie de $\mathbb{R}$,
   $$\exists x\in X \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N},\ n<x.$$
   Cette proposition est clairement fausse.
   b. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes,
   $$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N} \text{ tq } M<|x_{n_M}|.$$
   Cette proposition signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
   c. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels,
   $$\exists\varepsilon>0 \text{ tq } \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n_N\in\mathbb{N} \\ \text{tq } ((n\geq N\Rightarrow|x_n|<\varepsilon) \text{ faux })$$
   L'implication $\mathcal{P}\Rightarrow\mathcal{Q}$ est une abbréviation pour non$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}$. Sa négation est donc
   $$\mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q}.$$
   Finalement, la négation demandée s'écrit :
   $$\exists\varepsilon>0 \text{ tq } \forall N\in\mathbb{N},\ \exists n_N\in\mathbb{N} \\ \text{tq } (n\geq N \text{ et } \varepsilon\leq|x_n|)\,.$$

4. (Cvs04) On doit montrer que la relation est symétrique et transitive. On remarque que la transitivité ajoutée à l'hypothèse spécifique entraîne la transitivité.
Pour la symétrie, on utilise la réflexivité avec la propriété spécifique :
$$\left.\begin{matrix} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

5. (Cvs05)
   a. Des inclusions évidentes :
$$A\cap B \subset \begin{cases} A\cup B \\ B\cup C \\ C\cup A \end{cases}$$
$$\Rightarrow A\cap B \subset (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$$
De même pour $B\cap C$ et $C\cap A$. On en déduit l'inclusion demandée.
   b. Il est clair que l'ensemble à gauche de l'inclusion précédente (union d'intersections) est l'ensemble des x de E tels que $n(x)\geq 2$.
Considérons un x dans $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$. Il est alors dans l'union donc $n(x)\geq 1$. Si $x\notin A$ alors $x\in B$ et $x\in C$ car il appartient aux trois unions. On en déduit $n(x)\geq 2$. De même s'il n'est pas dans B ou pas dans C. Ceci prouve l'inclusion demandée et donc l'égalité.
   c. Soit $0<p<n$. Considérons :
$$\{x\in E \text{ tq } n(x)\geq p\} = \cup_{I\in\mathcal{P}_p}\hat{A}_I$$
En notant $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$ et, pour une telle partie $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$,
$$\hat{A}_I = \bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_p}$$

6. (Cvs06 Si $a\prec b$ et $a\neq b$ alors $b\prec a$ ne peut être vrai car, par antisymétrie d'une relation d'ordre, $a\prec b$ et $b\prec a$ entrainent $a=b$.
C'est évident dans un ensemble $\mathcal{P}(E)$ avec la relation d'ordre $\subset$.

7. pas de correction pour Evs07.tex

8. (Cvs08) Notons D_f l'espace de départ de f et A_f son espace d'arrivée et adoptons des notations analogues pour les autres fonctions. La possibilité de composer les fonctions se traduit par des inclusions :
$$h\circ g\circ f : \begin{cases} A_f\subset D_g \\ A_g\subset D_h \end{cases}$$
$$g\circ f\circ h : \begin{cases} A_h\subset D_f \\ A_f\subset D_g \end{cases}$$
$$f\circ h\circ g : \begin{cases} A_g\subset D_h \\ A_h\subset D_f \end{cases}$$
Comme certaines inclusions se repètent : trois suffisent :
$$A_f\subset D_g,\ A_g\subset D_h,\ A_h\subset D_f.$$
On utilise les résultats relatifs à la composition de 2 fonctions. Si la composée est injective alors la première est injective, si la composée est surjective, alors la deuxième est surjective.
$$\left.\begin{matrix} h\circ g\circ f \text{ injective} \\ f\circ h\circ g \text{ surjective} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ bijective}$$
Avec le même argument, on obtient $g\circ f$ et $f\circ h$ injectives et $f\circ h$ surjectives. En composant par la bijection réciproque f^{-1}, on conserve les propriétés. On en déduit que g et h sont injectives et h surjective. On a donc h bijective. Il ne manque plus que la surjectivité de g qui se déduit de celle de $f\circ h\circ g$ et de la bijectivité de f et h.

9. (Cvs09) Considérons l'ensemble indiqué par l'énoncé
$$A=\{x\in E \text{ tq } x\notin f(x)\}$$
On va montrer que A n'est pas l'image par f d'un élément de E.
En effet, pour tout $a\in A$, $a\notin f(a)$ par définition de A. On en déduit que $f(a)\neq A$ car $a\in A$ et $a\notin f(A)$.
D'autre part, pour tout $x\notin A$, on a $x\in f(x)$ par définition de A. Cette fois encore, $f(x)\neq A$ car $x\in f(x)$ et $x\notin A$.
Il est donc impossible que A soit une image par f, la fonction f ne peut pas être surjective.

10. pas de correction pour Evs10.tex

11. (Cvs11) Pour montrer que f injective entraine $A\cup B=E$, considérer les images par f de E et de $A\cup B$.
Pour montrer que $A\cup B=E$ entraine f injective, décomposer une partie quelconque X de E en
$$X=(A\cap X)\cup(B\cap X).$$
Pour montrer que f surjective entraine $A\cap B=\emptyset$, on peut considérer un antécédent de $(\emptyset, A\cap B)$.
Pour montrer que $A\cap B=\emptyset$ entraine f surjective, on peut considérer, pour tout $A_1\subset A$ et $B_1\subset B$, $f(A_1\cup B_1)$.

12. pas de correction pour Evs12.tex

13. (Cvs13) La table suivante répond aux contraintes : e est bien neutre , les éléments a et b admettent chacun les éléments a et b pour inverses. La loi ne peut pas être associative car (prop de cours) l'inverse devrait être unique.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

14. (Cvs14) Corrigé à compléter.

15. corrigé de vs15 à rédiger

16. pas de correction pour Evs16.tex

17. (Cvs17) Pour montrer la transitivité, ne pas chercher à traduire des équivalences par des combinaisons. Utiliser *l'implication*
$$(x,y)\prec(x',y')\Rightarrow x+y\leq x'+y'$$

18. (Cvs18) Les opérations sont commutatives mais pas associatives. Il n'existe pas d'élément neutre. La recherche d'éléments inversibles n'est donc pas pertinente.
On trouve $\bar{A} = A \downarrow A$ et

$$A \cup B = \overline{A \downarrow B} = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$

$$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \downarrow \bar{B} = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$

On obtient des formules du même genre avec $\uparrow$.

19. (Cvs19) D'après un résultat de cours, $f \circ g$ injective entraine g injective et $g \circ f$ surjective entraine g surjective. On en déduit que g est bijective. La composition par une application bijective conserve l'injectivité et la bijectivité donc $f \circ g$ injective et g bijective entraine f injective. De même $g \circ f$ surjective et g bijective entraine f surjective. On en tire que f est également bijective.

20. (Cvs20)voir le cours : Entiers naturels, ensembles finis, dénombrement

21. pas de correction pour Evs21.tex

22. pas de correction pour Evs22.tex

23. pas de correction pour Evs23.tex

24. (Cvs24) Si $A \cup B = B \cap C$,

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \subset B \Rightarrow A \subset B \\ A \cup B \subset C \Rightarrow B \subset C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset B \subset C.$$

Réciproquement, si $A \subset B \subset C$,

$$A \cup B = B = B \cap C.$$

25. (Cvs25)

$$E = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

26. pas de correction pour Evs26.tex

27. pas de correction pour Evs27.tex

28. pas de correction pour Evs28.tex

29. Cvs29 Comme f est injective, $f(\llbracket 0, 1\rrbracket)$ est une paire qui est un intervalle c'est donc $\llbracket -1, 0\rrbracket$ ou $\llbracket 0, 1\rrbracket$.
Supposons $f(1) = 1$ et montrons par récurrence $f(n) = n$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$. Si $f(n) = n$, il suffit de considérer l'image de $\llbracket n, n+1\rrbracket$.
Pour les nombres négatifs, on considère $\llbracket n-1, n\rrbracket$ en supposant $f(n) = n$.
Si $f(1) = -1$, on se ramène au cas précédent en considérant $-f$ qui vérifie les mêmes propriétés.
Si on ne suppose plus $f(0) = 0$, il existe d'autres solutions par exemple les translations. On peut montrer alors que les seules solutions sont les fonctions

$$n \mapsto \varepsilon n + c$$

avec $c \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

30. pas de correction pour Evs30.tex

31. pas de correction pour Evs31.tex