On cherche à évaluer numériquement à 10^{-10} l'intégrale

$$\int_0^{10} e^{-t^2} dt$$

Dans toutes les questions numériques, on prendra bien garde à adapter le nombre de chiffres utilisés par Maple dans ses calculs en virgule flottante (syntaxe `Digits`) avec la précision que l'on espère atteindre. On doit partir du principe que dans une somme les erreurs d'arrondi s'ajoutent.

I. Méthode des trapèzes.

On rappelle la formule des trapèzes et la majoration de l'erreur[1] pour une fonction $\mathcal{C}^2$:

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f a_{k+1})}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$$

avec $M_2 = \max_{[a,b]} |f''|$.

1. Pour $f(t) = e^{-t^2}$ et $[a, b] = [0, 10]$, en utilisant `diff` et `plot`, tracer le graphe de f'' entre 0 et 10. En déduire M_2.
2. On désigne par $\lceil x \rceil$ l'entier tel que $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. La syntaxe Maple est `ceil(x)`.
   En utilisant la formule d'erreur, exprimer formellement puis numériquement le plus petit entier n pour que l'erreur de méthode soit inférieure à $10^{(-10)}$. En tenant compte de l'accumulation possible des erreurs d'arrondi dans la somme,avec combien de chiffres significatifs (`Digits`) devrait-on calculer ? Est-ce réalisable ?
3. Refaire la question précédente pour l'intervalle $[0, 0.1]$ Calculer une valeur numérique à $10^{(-10)}$ en précisant le n. Comparer avec l'évaluation numérique fournie par Maple (syntaxe `int`).

II. Intégration par parties.

On se propose d'utiliser des intégrations par parties pour approcher

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt$$

La fonction Maple pour définir une intégrale sans la calculer est `Int`.

```
I1:= Int(exp(-t^2),t=0..1);
```

Il s'agit d'une version *inerte* de la fonction `int` qui cherchera à évaluer formellement ou numériquement.
La syntaxe Maple pour effectuer l'intégraion par parties

$$\int_0^1 1\, e^{-t^2} dt = \left[t\, e^{-t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 t\,(-2te^{-t^2})dt$$

est :

```
with(student):
I1 := intparts(I1,exp(-t^2));
```

Le deuxième argument de `intparts` est le facteur que l'on dérive dans l'intégration par parties.

1. En utilisant une boucle `for`. Répéter 10 fois l'intégration par parties.
2. Former une relation de récurrence définissant des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} : I_1 := \frac{a_n}{e} + b_n \int_0^1 t^{2n} e^{-t^2} dt$$
3. En utilisant
   $$0 \leq \int_0^1 t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2n+1}$$
   Calculer une valeur approchée à 10^{-10} sous la forme a_n. Quelle est la plus petite valeur de n. Valider en utilisant `int`.

III. Approximation de la fonction

Les méthodes précédentes ne permettent pas d'approcher l'intégrale entre 1 et 10 à 10^{-10}. On se propose ici d'approcher la fonction *avant* d'intégrer. On admet en particulier (voir feuille d'exercices sur les formules de Taylor) :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t^2)^k}{k!} \right| \leq \frac{(t^2)^{k+1}}{(k+1)!}$$

1. En utilisant
   $$\int_b^{10} e^{-t^2} dt \leq 10e^{-b^2}$$

[1] http ://back.maquisdoc.net/data/cours_nicolair/C2195.pdf

déterminer formellement puis numériquement un réel b tel que

$$\int_b^{10} e^{-t^2} dt \leq 10^{-12}$$

On cherchera donc à évaluer

$$\int_1^b e^{-t^2} dt$$

2. La suite

$$\left(\int_1^b \frac{t^{2k}}{k!} dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est décroissante à partir d'un certain rang. On se trouve donc dans la situation de convergence de l'hésitant fatigué pour la somme des

$$\left((-1)^k \int_1^b \frac{t^{2k}}{k!} dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Cette somme est donc une valeur approchée de l'intégrale lorsque le terme suivant à ajouter est plus petit que 10^{-10} en valeur absolue.
alculer numériquement une telle valeur approchée.