L'algorithme *d'exponentiation rapide* permet de calculer a^e où a et e sont des nombres naturels en effectuant moins (beaucoup moins !) de e multiplications.

Le premier cas est celui où l'exposant e est une puissance de 2. Pour calculer

$$x_m = a^{(2^m)}$$

on peut utiliser seulement m (au lieu de 2^m) multiplications en remarquant que

$$x_0 = a, x_{m+1} = x_m^2$$

Dans le cas général, on peut utiliser la décomposition de e en base 2. Les coefficients sont 0 ou 1 et seuls les 1 "comptent" dans le calcul de la puissance

$$\begin{aligned} e &= c_0 + c_1 2^1 + c_2 2^2 + \cdots + c_m 2^m \\ a^e &= a^{c_0} a^{c_1 2^1} \cdots a^{c_m 2^m} \\ a^e &= x_{i_1} x_{i_2} \ldots \end{aligned}$$

avec i_1, i_2 associés aux coefficients non nuls de la décomposition

1. Mettre en oeuvre le principe précédent pour calculer a^e sur un exemple en décomposant e en base 2 (par une succession d'opérations sans chercher à former un programme). Vérifier en calculant directement.
2. On modifie légèrement l'algorithme de décomposition de e en base 2 en calculant toutes les puissances de a dont l'exposant est une puissance de 2 et en multipliant ces nombres lorsque c'est nécessaire. Ce nouvel algorithme est présenté dans le diagramme de la figure 1 que vous devez traduire dans la syntaxe Maple.

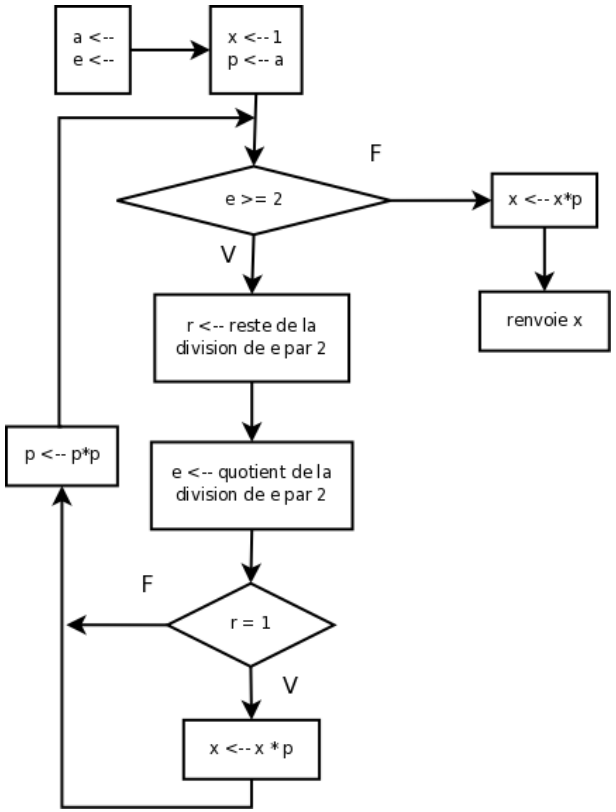

FIG. 1 – exponentiation rapide