

Soit A un polynôme de degré 2 et n un entier supérieur ou égal à 2. On définit une application α par :

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P \mapsto \frac{1}{2}A'P + AP' \end{cases}$$

1. (raisonnement mathématique) Montrer que les sous-espaces $\mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(\alpha)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
2. (raisonnement mathématique) Soit $f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, montrer qu'il existe Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et k réel tels que

$$\int^t \frac{f(x)}{\sqrt{A(x)}} dx = \Phi(x)\sqrt{A(x)} + k \int^t \frac{dx}{\sqrt{A(x)}}$$

3. (raisonnement mathématique) Soit $f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, expliquer comment on peut calculer $\Phi \in \mathbb{R}_n[X]$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha(\Phi) + k$.
4. Exemple

a. (sans Maple) Donner une expression logarithmique d'une primitive de

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$$

b. (avec Maple) En implémentant la méthode de la question 3. et en utilisant l'expression trouvée en 4.b., donner une primitive de

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$$

Comparer avec l'expression renvoyée directement par la fonction `int` de Maple. Que pouvez vous en conclure ?

5. Former une procédure prenant comme paramètre un polynôme f en x et renvoyant Φ et k tels que $f = \alpha(\phi) + k$.