Énoncé

Ce TP utilise des polynômes d'interpolation de Lagrange, sa solution nécéssite une fonction permettant d'en générer.
L'*algorithme de Kronecker*[1] permet de factoriser dans $\mathbb{Z}[X]$ un polynôme P à coefficients entiers.
Il repose sur l'essai exhaustif d'une famille de polynômes d'interpolation formée à partir des diviseurs des valeurs de P en des points entiers donnés ; par exemple $0, 1, -1, 2, -2, \cdots$. Cet algorithme est simple mais très coûteux.
Supposons Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifiant $P = QR$. Pour tout x entier, la relation $\widetilde{P}(x) = \widetilde{Q(x)}\widetilde{R(x)}$ est alors une relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
Supposons par exemple que $\deg Q = 1$. Alors $\widetilde{Q}(0)$ est un diviseur de $\widetilde{P}(0)$ et $\widetilde{Q}(1)$ est un diviseur de $\widetilde{P}(1)$. Il faut supposer évidemment que $\widetilde{P}(0)$ et $\widetilde{P}(1)$ sont non nuls. Mais s'ils sont nuls il y a des diviseurs évidents. Comme l'ensemble des diviseurs d'un entier est fini, le diviseur Q considéré est dans un ensemble *fini* de polynomes d'interpolation basés sur 0 et 1 et de valeurs tous les couples de diviseurs possibles. On peut tester systématiquement tous les polynômes d'interpolation formés avec ces diviseurs.
Pour chercher un diviseur de degré 2, on considère les diviseurs de $\widetilde{P}(-1)$, $\widetilde{P}(0)$ et $\widetilde{P}(1)$ et ainsi de suite.

1. Ici, `n` désigne un entier naturel n et `U` , `V` deux tableaux de $n + 1$ nombres indexés de 0 à n. Les U_i sont deux à deux distincts.
   Former une procédure dont l'appel `interpoLag(n,U,V)` renvoie un polynôme L de degré n en X développé et rangé suivant les puissance de X tel que $L(U_i) = V_i$ pour i entre 0 et n. Ce polynôme est donné par la formule
   $$L = \sum_{i=0}^{n} V_i \prod_{j\in\{0,1,\cdots,n\}\setminus\{i\}} \frac{X - U_j}{U_i - U_j}$$
2. Former une procedure `ldiv(n)` qui renvoie la liste des diviseurs (y compris négatifs) d'un entier désigné par `n` (utiliser `mod`). Bien veiller à ce que la procédure fonctionne pour des valeurs négatives du paramètre.
3. Former une procédure `divKron1(P)` qui renvoie un polynôme de degré 1 à coefficients entiers divisant P s'il en existe un et 0 s'il n'en existe pas.
4. Former des procédures `divKron2(P)` et `divKron3(P)` qui renvoient respectivement un polynôme de degré 2 ou de degré 3 à coefficients entiers divisant P s'il en existe un et 0 s'il n'en existe pas.
5. Factoriser en polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$ le polynôme P suivant :
   $$15X^9 + 49X^8 - 265X^7 - 620X^6 + 706X^5 + 834X^4 + 6719X^3 - 11483X^2 - 1665X + 5950$$
   Vérifier avec un `expand` ou la fonction Maple `factor`.

[1] d'après *Polynomials*, V.V. Prasolov (Springer)

Rémy Nicolai Akroneck