Énoncé

1. Trouver les m, p, q réels tels que le polynôme
$$X^6 + mX^4 + 10X^3 + pX + q$$
ait une racine de multiplicité 4.
2. Déterminer p et q pour que $X^4 + 3X^2 + p$ et $X^3 + X + q$ aient deux racines en commun.
3. Soit $A = X^4 + 6mX^2 + 4pX + q$. Trouver m, p, q réels pour que P admette une racine au moins triple
4. Comment choisir m, p, q pour que l'une des racines de $X^3 + mX^2 + pX + q$ soit la moyenne géométrique des deux autres.
5. Quelle relation doivent vérifier a, b, c, d pour que la somme de deux racines de
$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$$
soit égale à la somme des deux autres.
6. On se donne deux polynômes P et Q. On note Q_s le polynôme obtenu en substituant $s - X$ à X dans Q. On note T (transformée de Tschirnhaus) le résultat de l'algorithme d'Euclide appliqué à P et Q_s. C'est un polynôme de degré 0 en X que l'on regarde comme un polynôme en s.
   a. Montrer que les racines de T sont les sommes des racines de P et de Q.
   b. Former un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ admettant
   $$e^{\frac{2i\pi}{5}} + 3^{\frac{1}{3}} + \sqrt{2}$$
   pour racine.

Corrigé

Une feuille de calcul (format mw maple 13) est disponible

1. On note $A = X^6 + mX^4 + 10X^3 + pX + q$. Si a est une racine de multiplicité 4 de A, elle est aussi racine de A', A'' et A'''. Elle sera aussi racine des restes de la division par A''' de A, A', A''. Après simplification par des entiers ce dernier reste est :
$$mX^2 + \frac{15}{2}X$$
On en déduit que les seuls a possibles sont 0 et $-\frac{15}{2}$. Le cas $a = 0$ est impossible à cause du terme $10X^3$. On substitue alors dans les équations et on obtient 3 relations avec des p, q, m qui entrainent
$$m = -\frac{15}{2} \qquad p = -6 \qquad q = \frac{5}{2}$$
2.
3.
4.