



FIG. 1 – Projections sur un losange

L'objectif est d'utiliser les fonctionnalités de calcul formel pour résoudre analytiquement un exercice de géométrie. Quels sont les points du plan dont les projections sur les cotés d'un losange sont cocycliques ? Les notations sont définies sur la figure 1.

Attention dans toute la feuille, vous ne devez jamais assigner de valeurs aux noms de variables  $x$ ,  $y$ ,  $a$ ,  $b$ . La droite  $D1$  coupe les axes en  $(a, 0)$  et  $(0, b)$ . Vous devez pouvoir écrire son équation avec un 1 comme terme constant.

Suivant le cours, quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sont cocycliques si et seulement si on l'égalité suivante entre les angles orientés de droites  $((CB), (CA)) = ((DB), (DA))$ . Traduire cette égalité avec les affixes complexes.

Équation des droites. Compléter le code suivant en assignant aux variables  $D1$ ,  $D2$ ,  $\Delta1$ ,  $\Delta2$  respectivement les équations des droites  $D1$ ,  $D2$ ,  $\Delta1$ ,  $\Delta2$ . Le second membre doit être 1 ou -1.

```
D1:=;
```

```
D2:=;
Delta1:=;
Delta2:=;
u:=[1/a,1/b];
v:=[1/a,-1/b];
```

Calcul des projetés. Compléter le code suivant

```
M:=[x,y];
P:=[x+lambda/a,y+lambda/b];
Q:=[x+lambda/a,y-lambda/b];
```

Substituer à  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $P$  dans l'équation  $D1$ . Résoudre en  $\lambda$ . Substituer le résultat dans  $P$  et assigner à  $P1$ . Même procédure pour  $P2$ ,  $Q1$ ,  $Q2$ .

Condition de cocyclicité Par défaut, Maple ne considère pas qu'une variable est à valeurs réelles. L'instruction suivante précise que  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$  désignent des nombres réels.

```
assume(a,real,b,real,x,real,y,real);
```

Assigner à  $p1$ ,  $p2$ ,  $q1$ ,  $q2$  les affixes de  $P1$ ,  $P2$ ,  $Q1$ ,  $Q2$ .

Former un nombre complexe  $c$  tel que les quatre points sont cocycliques si et seulement si la partie imaginaire de ce nombre est nulle. La forme sera

```
c:=( )*( )*conjugate(( )*( ));
```

# pour calculer sa partie imaginaire

```
Im(expand(c));
```

```
factor(Im(expand(c)));
```

Interpréter le résultat pour conclure.