Énoncé

Vous devrez produire deux documents : un compte-rendu papier rédigé et contenant les réponses aux questions posées et une feuille de calcul Maple contenant les instructions faisant effectuer les calculs nécessaires.
Une annexe présentant la syntaxe de fonctions Maple particulièrement utiles est donnée à la fin de l'énoncé.

Ce TP porte sur les racines 17èmes de l'unité. On va montrer que l'on peut les exprimer en utilisant une cascade d'équations du second degré dont les solutions sont des expressions bien choisies[1].
On note $\mathbb{U}_{17}$ l'ensemble des solutions complexes de l'équation $x^{17}-1=0$ d'inconnue x. Un élément de $\mathbb{U}_{17}$ sera appelé une *racine 17 ème de l'unité*. Il est clair que 1 est une racine 17ème de l'unité, on désigne par $\mathbb{U}_{17}^*$ l'ensemble des racines autres que 1.
D'après le cours, on sait que $\mathbb{U}_{17}$ est une partie de $\mathbb{C}$ contenant 17 éléments, stable par multiplication (sous-groupe de $\mathbb{U}$) et qu'il existe un nombre complexe w tel que

$$\mathbb{U}_{17} = \left\{1, w, w^2, \cdots, w^{16}\right\} \text{ avec } w = e^{\frac{2i\pi}{17}}$$

Une variable `w` sera utilisée dans les calculs Maple. Elle ne sera JAMAIS assignée. On pourra en revanche lui substituer l'expression exponentielle pour des *évaluations numériques*.

Partie I. Produits modulo 17.

L'objet de cette partie est de faire émerger une décomposition de l'ensemble des entiers entre 1 et 16 en divers sous-ensembles. Cette décomposition est attachée à une décomposition de l'ensemble des $\varphi_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_{16}$ où, pour tout k entier naturel non nul, on note φ_k l'application définie dans $\mathbb{U}_{17}$ par $\varphi_k(u) = u^k$.

1. Vérifier que φ_k est un morphisme de $(\mathbb{U}_{17}, *)$. C'est à dire que, pour u et v dans $\mathbb{U}_{17}$, on a $\varphi_k(uv) = \varphi_k(u)\varphi_k(v)$. Préciser $\varphi_k \circ \varphi_l$ pour des naturels non nuls k et l.
2. Pour k et p dans $\mathbb{Z}$, préciser l'exposant de $\varphi_k(w^p)$ comme puissance de w. Que peut-on en déduire pour φ_{k+17} ?
3. Montrer, par un calcul Maple[2], que $\varphi_k^{16} = \mathrm{Id}_{\mathbb{U}_{17}}$ pour tous les entiers k.
4. On se propose de calculer, pour chaque k entre 1 et 16, les puissances de φ_k.
   a. Cela revient à calculer les restes modulo 17 des k^p pour k et p entre 1 et 16, Pourquoi ?
   b. Assigner à une variable `T` un tableau indexé de 1 à 16. Pour chaque `k` entre 1 et 16, assigner à `T[k]` l'ensemble des restes modulo 17 des k^p pour p entre 1 et 16.
   c. On constate que, parmi les ensembles obtenus, les mêmes se retrouvent plusieurs fois. On obtient en fait seulement 5 ensembles distincts et ils sont inclus les uns dans les autres. Pour les calculs Maple qui suivent, on les désigne par des variables particulières.
      – Assigner à `s` l'ensemble des entiers de 1 à 16.
      – Un seul ensemble contient 8 éléments. Mathématiquement, on le note a. Assigner à `a` cet ensemble.
      – Un seul ensemble contient 4 éléments. Mathématiquement, on le note c. Assigner à `c` cet ensemble.
      – Un seul ensemble contient 2 éléments. Mathématiquement, on le note g. Assigner à `g` cet ensemble.
      – Mathématiquement, on note b le complémentaire de a dans s. Assigner à `b` cet ensemble.
      – Mathématiquement, on note d le complémentaire de c dans a. Assigner à `d` cet ensemble.
      – Mathématiquement, on note h le complémentaire de g dans c. Assigner à `h` cet ensemble.
5. On va encore définir deux autres parties de s. Pour cela, on examine l'effet des φ_k pour $k \in c$ sur les éléments de $\mathbb{U}_{17}^*$.
   a. Si $u = w^p$, que vaut $\varphi_k(u)$?
   b. Assigner à une variable `TO` un tableau indexé de 1 à 16.
   c. Pour p entre 1 et 16, assigner à `TO[p]` l'ensemble des restes des kp modulo 17 pour k décrivant c.
   d. On constate que, parmi les ensembles obtenus, les mêmes se retrouvent plusieurs fois. On obtient en fait seulement 4 ensembles distincts parmi lesquels se trouvent deux ensembles déjà nommés. Assigner à `e` et `f` les deux nouveaux ensembles[3].

Parties II. Sommes.

Dans la partie I, on a défini des sous-ensembles a, b, c, d, e, f, g, h, s de l'ensemble des entiers entre 1 et 16. On définit maintenant des sommes $Wa, Wb, \cdots, Wz$

[1] la manière dont on aboutit à ce choix est en fait une introduction à la théorie de Galois.
[2] on pourrait le démontrer sans calcul par un résultat arithmétique de Fermat
[3] il y a bien deux possibilités, ceci n'est pas une erreur.

par la formule suivante. Si x désigne un des ensembles

$$Wx = \sum_{k\in x} w^k$$

Par exemple, vous devez avoir trouvé $g = \{1, 16\}$, on a donc $Wg = w^1 + w^{16}$ et de même pour chacun des ensembles.

1. Assigner à des variables `Wa`, `Wb`, ... les sommes $Wa, Wb, \cdots$.
2. Mathématiquement, quelle est la valeur de Ws ? Assigner à une variable `Rel` un ensemble contenant un seul élément, cet élément étant *l'égalité* (pas l'assignation) entre `Ws` et sa valeur mathématiquement trouvée. La variable `Ws` sera écrite *à gauche* de l'égalité.
3. Écrire les relations entre les sommes découlant des complémentarités entre parties $a, b, \cdots$. Que pensez vous de Wb, We, Wf.

Partie III. Cascade d'équations.

1. On veut exprimer Wa et Wb avec des racines carrées.
   a. Simplifier la somme $Wa+Wb$ et le produit $Wa\,Wb$ en utilisant la valeur de Ws. En déduire que Wa et Wb sont les solutions d'une certaine équation du second degré et à coefficients entiers à préciser.
   b. Pourquoi Wa et Wb sont-ils des nombres réels ? Assigner à `w_n` une approximation numérique de $e^{\frac{2i\pi}{17}}$. En utilisant une substitution, former des approximations numériques de Wa et Wb.
   c. Exprimer Wa et W_b avec des racines carrées. Assigner ces expressions à `Wa` et `Wb`.
2. Les expressions intervenant dans la suite sont trop compliquées pour être manipulées. La suite se fera donc entièrement sur la feuille de calcul. Exprimer comme dans la question précédente `Wc` et `Wd` puis `We` et `Wf` puis `Wg` et `Wh`.
3. Former une expression de $\cos\frac{2\pi}{17}$ avec des radicaux. Vérifier numériquement cette expression.

Annexe. Syntaxe des fonctions Maple à utiliser

– `mod`. Une fonction infixe qui renvoie le reste d'une division euclidienne. Par exemple `a mod b` renvoie le reste entre 0 et $b-1$ de la division de a par b. Cette fonction est plus rapide que `irem(a,b)`.
– `seq`. Cette fonction renvoie une séquence. Par exemple, `seq(i^2,i=1..16)` renvoie la séquence des carrés des entiers entre 1 et 16. Pour former un ensemble à partir d'une séquence, il suffit de l'entourer par des accolades `{` et `}`.
– variante pour la syntaxe de `seq`. Le deuxième argument décrit les indices qui interviennent. Maple accepte aussi une syntaxe ensembliste. Par exemple `seq(k^2, k in {1,2,3})` renvoie $1, 4, 9$.
– `add`. La syntaxe de cette fonction est très proche de celle de `seq` mais elle renvoie une somme au lieu d'une séquence. La forme ensembliste pour décrire les indices sur lesquels porte la somme est possible.
– `minus`. Une fonction infixe qui permet de calculer le complémentaire d'une partie dans une autre. Par exemple `{1,2,3,4} minus {2,4}` renvoie `{1,3}`.
– `expand`. Cette fonction permet de *développer*. Par exemple, si `A` et `B` sont des sommes, l'appel `expand(A*B)` renvoie le développement en somme du produit `A*B`.
– `simplify`. Comme son nom l'indique, cette fonction essaie de simplifier. Une syntaxe possible pour l(appel est `simplify(expr,R)` où `R` est une expression que l'on veut simplifier et où `R` est un *ensemble* de relations vérifiées par les variables intervenant dans l'expression. Dans ce cas l'expression simplifiée est renvoyée.
– `exp`. La fonction exponentielle complexe.
– `evalf`. Cette fonction renvoie une approximation décimale de son argument.
– `subs`. Cette fonction renvoie le résultat d'une substitution. Le premier argument est un ensemble de relations, le deuxième est l'expression dans laquelle on effectue la substitution. Par exemple `subs({x = truc},expr)` renvoie ce que devient `expr` lorsque l'on remplace dans `expr` chaque occurrence de `x` par `truc`.
– `solve`. Cette fonction essaie de résoudre des équations. Par exemple l'appel `solve(Eq,x)` où `Eq` désigne une équation d'inconnue `x` (non assignée) renvoie une séquence conenant les solutions[4]. Il peut être commode de placer la séquence solution entre crochets pour former une liste. Ceci permet de récupérer plus facilement les valeurs car si `L` est une liste de deux valeurs, celles ci sont `L[1]` et `L[2]`.

[4]si Maple connait un algorithme qui permet de le faire. Ce qui n'est pas toujours le cas.

Corrigé

Partie I. Produits modulo 17.

1. La vérification pour le morphisme est immédiate et $\varphi_k \circ \varphi_l = \varphi_{kl}$.
2. L'exposant est kp. Pour $k+17$, l'exposant est $(k+17)p = kp + 17p$. Or $w^{17p} = 1$ donc $\varphi_{k+17} = \varphi_k$.
3. D'après la question précédente, il suffit de le prouver pour k entre 1 et 16. Comme d'autre part
$$\varphi_k^{16} = \varphi_{k^{16}}$$
Il suffit de montrer que $k^16 \mod 17 = 1$ pour tous les k. On peut exécuter
```
for k from 1 to 16 do
  k^16 mod 17
od;
```
qui ne renvoie effectivement que des 1.
4. a. Il suffit de remarquer que $\varphi_k^p = \varphi_{pk}$ et que seul le reste modulo 17 compte dans l'indice de φ.

   b. On effectue les calculs en exécutant
```
T:= array(1..16);
for k from 1 to 16 do
  T[k] := {seq(k^p mod 17 ,p=1..16)};
od;
```
   c. Après avoir examiné les valeurs dans `T`, il suffit d'exécuter les instructions suivantes
```
s := T[3];
a := T[2];
c := T[4];
g := T[16];
b := s minus a;
d := a minus c;
h := c minus g;
```
5. a. D'après les premiers calculs, $\varphi_k(w^p) = w^{pk}$.

   b. L'instruction est `TO := array(1..16);`.

   c. On exécute le code
```
for p from 1 to 16 do
  TO[p] := {seq(p*k mod 17, k in c)};
od;
```
   d. En examinant ce que renvoie le code précédent, on constate ce qu'annonce l'énoncé. On exécute
```
e:= TO[3];
f := TO[6];
```
   pour réaliser les assignations demandées.

Parties II. Sommes

1. Il est commode d'utiliser `add` avec la syntaxe ensembliste.
```
Wa = add(w^k, k in a);
Wb = add(w^k, k in b);
Wc = add(w^k, k in c);
Wd = add(w^k, k in d);
We = add(w^k, k in e);
Wf = add(w^k, k in f);
Ws = add(w^k, k in s);
```
2. À cause des propriétés des racine de n-ièmes de l'unité, on sait que $1+Ws = 0$ donc $Ws = -1$. On exécute
```
Rel := { Ws = -1 };
```
3. Les définitions par complémentarité et la constatation que b est l'union disjointe de e et f conduisent à :
$$Ws = Wa + Wb, \quad Wa = Wc + Wd, \quad Wc = Wg + Wh, \quad Wb = We + Wf$$

Partie III. Cascade d'équations.

1. a. On a déjà vu que $Wa + Wb = -1$. En revanche le développement et la simplification du produit est difficile. On le fait faire par l'instruction
```
simplify(expand(Wa*Wb),Rel);
```
   car `Rel` désigne l'ensemble contenant la relation permettant de simplifier. On en déduit $Wa * Wb = -4$. Connaissant leur somme et leur produit, on peut former l'équation du second degré dont Wa et Wb sont les solutions. Il s'agit de
$$x^2 + x - 4 = 0$$

b. Rappelons ce qui a été trouvé par a

$$a = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$$

On peut regrouper les éléments deux par deux : 1 avec 16, 2 avec 15, 4 avec 13 et 8 avec 9. Ils sont de la forme k et $17-k$. Les puissances de w associées sont conjuguées.

$$w^k + w^{17-k} = w^k + w^{-k} = w^k + \bar{w^k} = 2\,\mathrm{Re}(w^k)$$

ce qui prouve que Wa est réel. Comme la somme des deux est réelle $(=-1)$, on en déduit que Wb est aussi réel. On exécute les calculs d'approximation avec le code

```
w_n := evalf(exp(2*I*Pi/17)):
subs({w=w_n},Wa);
subs({w=w_n},Wb);
```

On trouve une valeur positive pour Wa et négative pour Wb. On remarque que la valeur approchée n'est pas réelle mais que la partie imaginaire est de l'ordre de 10^{-10} ce qui correspond à la précision par défaut des calculs décimaux.

c. On fait résoudre l'équation, on évalue numériquement les solutions.

```
Eq := x^2 + x - 4:
truc := [solve(Eq,x)];
evalf(truc);
```

après examen des résultats, on assigne

```
Wa := truc[1]; Wb := truc[2];
```

$$Wa = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \qquad Wb = -\frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

2. a. Calcul de Wc et Wd. La somme est Wa. On simplifie le produit avec `simplify(expand(Wc*Wd),Rel);` qui renvoie -1. On en déduit que We et Wf sont les racines de

$$x^2 - Wax - 1 = 0$$

On résoud et on évalue pour affecter les racines

```
Eq := x^2 -Wa*x -1;
truc := [solve(Eq,x)]:
evalf(truc);
subs({w=w_n},Wc);
subs({w=w_n},Wd);
```

Après examen du résultat, on forme les bonnes assignations

```
Wc := truc[2]:
Wd := truc[1]:
```

b. Calcul de We et Wf. La somme est Wb. On simplifie le produit avec `simplify(expand(We*Wf),Rel);` qui renvoie -1. On en déduit que We et Wf sont les racines de

$$x^2 - Wbx - 1 = 0$$

On résoud et on évalue pour affecter les racines

```
Eq := x^2 -Wb*x -1;
truc := [solve(Eq,x)]:
evalf(truc);
subs({w=w_n},We);
subs({w=w_n},Wf);
```

Après examen du résultat, on forme les bonnes assignations

```
We := truc[2]:
Wf := truc[1]:
```

c. Calcul de Wg et Wh. La somme est Wc. Le produit se simplifie avec `simplify(expand(Wg*Wh),Rel);`. Cette fois le résultat n'est pas entier mais on remarque que c'est We. On en déduit que Wg et Wh sont les racines de

$$x^2 - Wcx + We = 0$$

On résoud et on évalue pour affecter les racines

```
Eq := x^2 -Wc*x +We;
truc := [solve(Eq,x)]:
evalf(truc);
subs({w=w_n},Wg);
subs({w=w_n},Wh);
```

Après examen du résultat, on forme les bonnes assignations

```
Wg := truc[1]:
Wh := truc[2]:
```

3. L'expression de $\cos\frac{2\pi}{17}$ vient de $Wg = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.
On peut vérifier numériquement en faisant calculer

```
evalf(cos(2*Pi/17) - Wg/2);
```

qui renvoie un résultat de l'ordre de 10^{-10}.
On peut demander à Maple une sortie LateX pour pouvoir écrire la relation

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$+\frac{1}{16}\sqrt{68+12\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17}\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$