

On se propose d'étudier les suites définies par récurrence par  $u_0 = a$ ,  $u_1 = b$  et

$$u_{n+1} = 111 - \frac{1130}{u_n} + \frac{3000}{u_n u_{n-1}}$$

1. Former une procédure

`suite(n,d,a,b)`

renvoyant une évaluation numérique du  $n$  eme terme de la suite avec  $d$  chiffres significatifs. Examiner en particulier les résultats obtenus pour  $d$  valant 10, 20, 30 et  $n$  variant entre 5 et 40 avec les conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} Pe : & a = 11/2 & b = 61/11 \\ Pf : & a = 5.5 & b = 61/11 \end{array}$$

2. On interprète la suite précédente en itérant une transformation  $g$  du plan (privé de l'origine) dans lui même définie par :

lorsque  $M$  est le point de coordonnées  $(x, y)$ ,  $g(M)$  est le point de coordonnées :

$$\left(y, 111 - \frac{1130}{y} + \frac{3000}{xy}\right)$$

On forme une suite de points en se donnant un point  $P_0$  et la relation de récurrence  $P_{n+1} = g(P_n)$ .

Quel rapport avec le 1. ? Chercher les points fixes de  $g$  (utiliser solve).

Former une fonction `g` dont l'argument est la liste des coordonnées d'un point  $P$  et renvoyant les coordonnées du point  $g(P)$  dans une liste.

3. On veut montrer que si  $P_0 = [11/2, 61/11]$  les  $P_n$  sont sur une même conique. On considère une fonction de la forme

$$F = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

avec des coefficients  $a, b, c, d, e, f$  arbitraires. Former et résoudre le système de 5 équations aux inconnues  $a, b, c, d, e, f$  traduisant que  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  sont sur la ligne de niveau 0 de  $F$ . Montrer (en utilisant subs) que cette ligne de niveau est invariante par  $g$ .

4. Faire de jolis dessins pour comprendre ce qui se passe (en particulier la notion de "bassin d'attraction").