

On considère une suite récurrente (dite suite de Syracuse¹) définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire de la suite des u_k pour $k \geq n$ lorsque $u_n = 1$.
2. Écrire une procédure `syr` prenant comme paramètre une variable à valeurs dans \mathbb{N} et dont l'appel `syr(n)` renvoie $n/2$ si n est pair et $3*n+1$ si n est impair.
3. Écrire une procédure dont l'appel `syracuse(n,u)` renvoie u_n pour $u_0 = u$. Ici n et u sont les entiers respectivement désignés par `n` et `u`. Cette procédure utilisera `syr`.
4. Former une procédure dont l'appel `syreq1(u)` renvoie (s'il existe) le premier entier $k \leq 200$ tel que $u_k = 1$ pour la suite définie par $u_0 = u$ et renvoie 201 lorsqu'un tel entier n'existe pas. Montrer avec Maple que pour toute valeur initiale u_0 comprise entre 1 et 1000, il existe un entier k tel que $u_k = 1$. Quelle est la plus petite valeur de u_0 pour laquelle la suite ne prend pas la valeur 1 avant le 201 eme terme ?
5. Soit u un entier tel que la suite définie par $u_0 = u$ prenne la valeur 1. On appelle *orbite* de u la suite finie des valeurs de la suite jusqu'au premier 1. Écrire une procédure dont l'appel `orb(u)` renvoie une liste formée par l'orbite de u .
6. Préciser l'orbite de 27, la dessiner (c'est à dire les points de coordonnées (k, u_k)).
7. Rechercher l'orbite la plus longue pour les valeurs initiales entre 1 et 1000. La dessiner.
8. Écrire une procédure dont l'appel `maxorb(u)` renvoie la plus grande valeur dans l'orbite de u . Pour u entre 1 et 30, rechercher la plus grande valeur atteinte et dessiner l'orbite sur laquelle elle se trouve.

¹cette suite remonte aux années 20, introduite aux USA à l'université de Syracuse dans les années 50. La conjecture (facile à deviner) qui y est attachée mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine. ([wikipedia](#))